Introducción a la Lógica
Práctica 01

Curso 2017 - 2018
Grupo A3. Aula 405

Eduardo Hermo Reyes

27 de septiembre de 2017

Ejercicio 1. *Indique si la expresiones siguientes son fórmulas o son expresiones sintácticamente incorrectas sin aplicar la regla de omisión de paréntesis. Compare los resultados con la aplicación de dicha regla.*

1. $(p \vee q) \to r \wedge s$;
2. $(p \leftrightarrow q)$;
3. $(p \to q \wedge s)$;
4. $\neg(p \wedge q)$;
5. $(\neg(p \wedge q))$;
6. $\neg(p)$;
7. $\neg p$.

Ejercicio 2. *Construya el árbol genealógico de la siguiente fórmula e indique su conectiva principal:*

$$((p \to q) \to (s \wedge t)) \vee \neg p \ .$$

Ejercicio 3. *Halle todas las asignaciones que hagan verdadera a cada una de las siguientes fórmulas:*

1. $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow s)$;
2. $\neg p \leftrightarrow (\neg q \leftrightarrow \neg s)$;
3. $\neg p \leftrightarrow \neg(q \leftrightarrow s)$;
4. $\neg(p \leftrightarrow (q \leftrightarrow s))$.

Ejercicio 4. *Diga si la siguiente fórmula es una tautología, una contradicción o una fórmula contingente. Justifique la respuesta:*

$$(p \wedge q) \vee (t \rightarrow s) \vee (p \rightarrow (q \wedge r)) \vee ((\neg r \wedge t) \wedge \neg u) \vee \neg((w \rightarrow \neg w) \wedge w) \ .$$

Ejercicio 5. *Para cada una de las siguientes fórmulas, construya una fórmula equivalente que solo contenga disyunción y negación ($\vee$, $\neg$) como conectivas.*

1. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$;

2. $(p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow s)$;

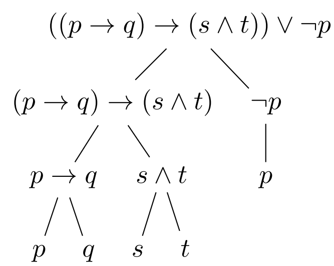
3. $(p \wedge q) \rightarrow r$;

4. $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$.

Solución al ejercicio 1.

1. No es una fórmula en ambos casos;
2. Es una fórmula en ambos casos;
3. No es una fórmula en ambos casos;
4. Es una fórmula en ambos casos;
5. No es una fórmula en ambos casos;
6. No es una fórmula en ambos casos;
7. Es una fórmula en ambos casos.

Solución al ejercicio 2. La conectiva principal es la disyunción. El árbol genealógico es el siguiente:



Solución al ejercicio 3.

1. $\overline{v}(p \leftrightarrow (q \leftrightarrow s)) = V$ sii $\overline{v}(p) = \overline{v}(q \leftrightarrow s)$. Por lo tanto, si $v(p) = V$, entonces $\overline{v}(q \leftrightarrow s) = V$. Es decir, si $v(p) = V$ entonces $v(q) = v(s)$. Por otro lado, si $v(p) = F$, entonces $\overline{v}(q \leftrightarrow s) = F$. Así pues, si $v(p) = F$ entonces $v(q) \neq v(s)$. El razonamiento anterior nos lleva a las siguientes asignaciones:
   - $v_0(p) = v_0(q) = v_0(s) = V$;
   - $v_1(p) = V$ y $v_1(q) = v_1(s) = F$;
   - $v_2(p) = F$ y $v_2(q) = F$ y $v_2(s) = V$;
   - $v_3(p) = F$ y $v_3(q) = T$ y $v_3(s) = F$.
2. $\overline{v}(\neg p \leftrightarrow (\neg q \leftrightarrow \neg s)) = V$ sii $\overline{v}(\neg p) = \overline{v}(\neg q \leftrightarrow \neg s)$. Por lo tanto, si $v(p) = F$, entonces $\overline{v}(\neg p) = V$ y así $\overline{v}(\neg q \leftrightarrow \neg s) = V$. Es decir, si $v(p) = F$ entonces $\overline{v}(\neg q) = \overline{v}(\neg s)$ y por lo tanto $v(q) = v(s)$. Por otro lado, si $v(p) = V$, entonces $\overline{v}(\neg p) = F$ y así $\overline{v}(\neg q \leftrightarrow \neg s) = F$. Así pues, si $v(p) = V$ entonces $\overline{v}(\neg q) \neq \overline{v}(\neg s)$ y por lo tanto, $v(q) \neq v(s)$. El razonamiento anterior nos lleva a las siguientes asignaciones:

- $v_0(p) = v_0(q) = v_0(s) = F$;
- $v_1(p) = F$ y $v_1(q) = v_1(s) = V$;
- $v_2(p) = v_2(s) = T$ y $v_2(q) = F$;
- $v_3(p) = v_3(q) = T$ y $v_3(s) = F$.

3. $\overline{v}\big(\neg p \leftrightarrow \neg(q \leftrightarrow s)\big) = V$ sii $\overline{v}(\neg p) = \overline{v}\big(\neg(q \leftrightarrow s)\big)$. Por lo tanto, podemos concluir que $\overline{v}\big(\neg p \leftrightarrow \neg(q \leftrightarrow s)\big) = V$ sii $\overline{v}(p) = \overline{v}(q \leftrightarrow s)$. Así pues, obtenemos las mismas asignaciones que en el apartado 1.

4. $\overline{v}\big(\neg(p \leftrightarrow (q \leftrightarrow s))\big) = V$ sii $\overline{v}\big(p \leftrightarrow (q \leftrightarrow s)\big) = F$ sii $\overline{v}(p) \neq \overline{v}(q \leftrightarrow s)$. Es fácil observar que para toda v, $\overline{v}(q \leftrightarrow s) = \overline{v}(\neg q \leftrightarrow \neg s)$. Por lo tanto, $\overline{v}\big(\neg(p \leftrightarrow (q \leftrightarrow s))\big) = V$ sii $\overline{v}(p) \neq \overline{v}(\neg q \leftrightarrow \neg s)$ sii $\overline{v}(\neg p) = \overline{v}(\neg q \leftrightarrow \neg s)$. De esta forma obtenemos que las asignaciones son las mismas que las del apartado 2.

Solución al ejercicio 4.
La fórmula es una tautología. Sea

$$\alpha := (p \wedge q) \vee (t \rightarrow s) \vee (p \rightarrow (q \wedge r)) \vee ((\neg r \wedge t) \wedge \neg u) \vee \neg((w \rightarrow \neg w) \wedge w)\ .$$

Para ver que α es una tautolgía, necesitamos comprobar que para toda asignación v, $\overline{v}(\alpha) = V$. Podemos ver que α es una disyunción formada por las fórmulas:

$\beta_1 :=\ (p \wedge q)$;

$\beta_2 :=\ (t \rightarrow s)$;

$\beta_3 :=\ (p \rightarrow (q \wedge r))$;

$\beta_4 :=\ ((\neg r \wedge t) \wedge \neg u)$;

$\beta_5 :=\ \neg((w \rightarrow \neg w) \wedge w)$.

Así pues, para ver que α es una tautología, basta con comprobar que para toda asignación v, $\overline{v}(\beta_1) = V$ o $\overline{v}(\beta_2) = V$ o $\overline{v}(\beta_3) = V$ o $\overline{v}(\beta_4) = V$ o $\overline{v}(\beta_5) = V$. En concreto, podemos comprobar fácilmente que la fórmula β_5 es una tautología. Por lo tanto, para toda asignación v, $\overline{v}(\beta_5) = V$ y así, $\overline{v}(\alpha) = V$.

Solución al ejercicio 5.

1. $$\begin{aligned} p \rightarrow (q \rightarrow r) &\equiv \neg p \vee (q \rightarrow r); \\ &\equiv \neg p \vee \neg q \vee r. \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} (p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow s) &\equiv \neg(p \rightarrow q) \vee (r \rightarrow s); \\ &\equiv \neg(\neg p \vee q) \vee (\neg r \vee s). \end{aligned}$$

3. $(p \wedge q) \to r \equiv \neg(p \wedge q) \vee r;$

$$\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee r.$$

4. $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p) \equiv \neg(\neg p \vee \neg q) \leftrightarrow \neg(\neg q \vee \neg p);$

$$\equiv \big(\neg(\neg p \vee \neg q) \to \neg(\neg q \vee \neg p)\big) \wedge \big(\neg(\neg q \vee \neg p) \to \neg(\neg p \vee \neg q)\big);$$

$$\equiv \big((\neg p \vee \neg q) \vee \neg(\neg q \vee \neg p)\big) \wedge \big((\neg q \vee \neg p) \vee \neg(\neg p \vee \neg q)\big);$$

$$\equiv \neg\Big(\neg\big((\neg p \vee \neg q) \vee \neg(\neg q \vee \neg p)\big) \vee \neg\big((\neg q \vee \neg p) \vee \neg(\neg p \vee \neg q)\big)\Big).$$