Què són els nombres?

Barcelona Pensa Festival
vuitena edició

Joost J. Joosten

University of Barcelona

Dimecres 17-11-2021

Què són els nombres?

Suma Gaussiana

Carl Friedrich Gauss
(1777 – 1855 dC)

- $1 + 2 + 3 + 4 \ldots + 100 = ?$

Suma Gaussiana

Carl Friedrich Gauss
(1777 – 1855 dC)

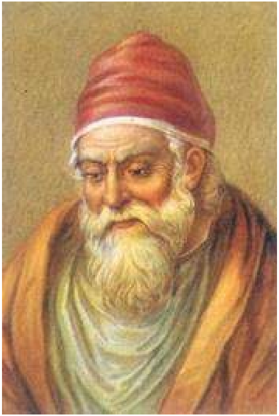
- $1 + 2 + 3 + 4 \ldots + 100 = ?$
- $1 + 2 \ldots + 100 = \frac{100 \times 101}{2}$

Suma Gaussiana

Carl Friedrich Gauss
(1777 – 1855 dC)

- $1 + 2 + 3 + 4 \ldots + 100 = ?$
- $1 + 2 \ldots + 100 = \frac{100 \times 101}{2}$
- $1 + 2 \ldots + n = \frac{n \times (n+1)}{2}$

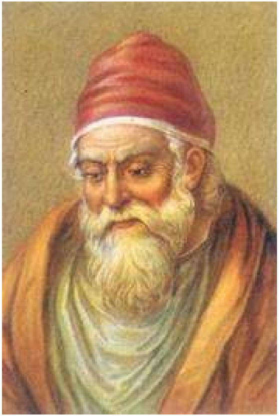
Una infinitat de nombres primers



Euclides d'Alexandria
(325 – 270 aC)

- Un nombre natural és primer quan és divisible per exactament dos nombres diferents: per 1 i per si mateix

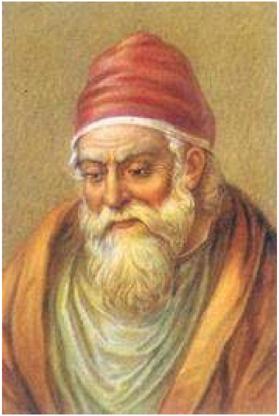
Una infinitat de nombres primers



Euclides d'Alexandria
(325 – 270 aC)

- Un nombre natural és primer quan és divisible per exactament dos nombres diferents: per 1 i per si mateix
- Euclides: existeixen infinits nombres primers

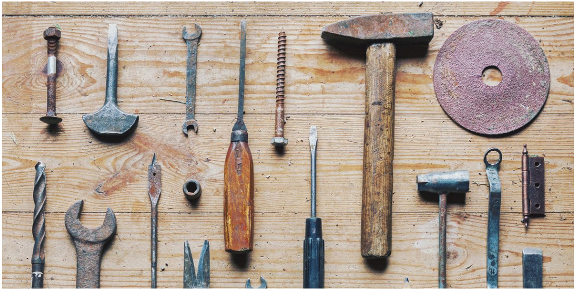
Una infinitat de nombres primers



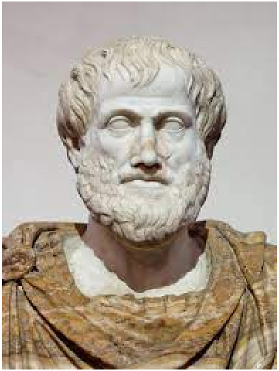
Euclides d'Alexandria
(325 – 270 aC)

- Un nombre natural és primer quan és divisible per exactament dos nombres diferents: per 1 i per si mateix
- Euclides: existeixen infinits nombres primers
- Conjectura de Goldbach: cada nombre major que 2 és igual a la suma de dos nombres primers
(obert des de 1742)

Preparem algunes eines conceptuals



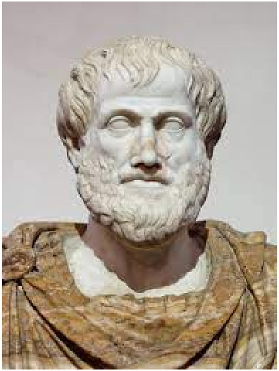
Metafísica



Aristòtil (384 – 322 aC)

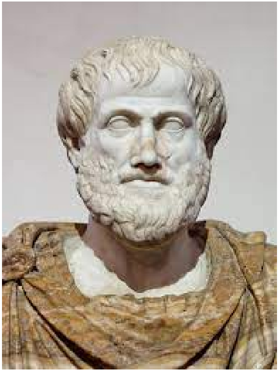
- Probablement el nom ve de *meta ta physika*

Metafísica


Aristòtil (384 – 322 aC)

- Probablement el nom ve de *meta ta physika*
- 'Després de la física'

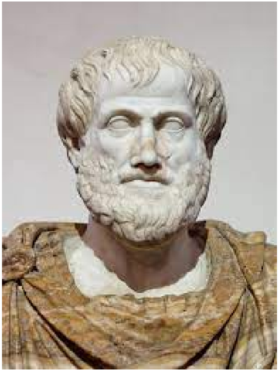
Metafísica



Aristòtil (384 – 322 aC)

- Probablement el nom ve de *meta ta physika*
- 'Després de la física'
- Tracta amb preguntes com ara

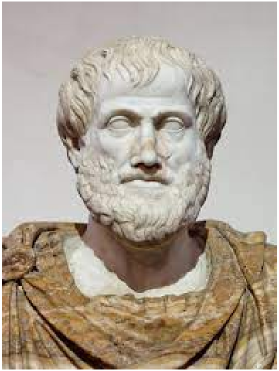
Metafísica



Aristòtil (384 – 322 aC)

- Probablement el nom ve de *meta ta physika*
- 'Després de la física'
- Tracta amb preguntes com ara
  - Què és el que existeix? i

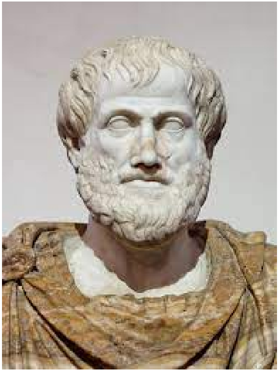
Metafísica



Aristòtil (384 – 322 aC)

- Probablement el nom ve de *meta ta physika*
- 'Després de la física'
- Tracta amb preguntes com ara
  - Què és el que existeix?
    i
  - Com és?
    i

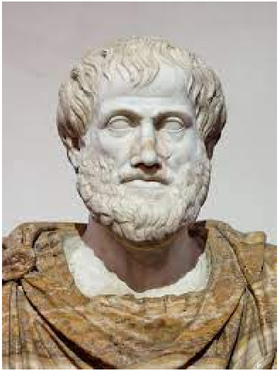
Metafísica



Aristòtil (384 – 322 aC)

- Probablement el nom ve de *meta ta physika*
- 'Després de la física'
- Tracta amb preguntes com ara
  - Què és el que existeix?
    i
  - Com és?
    i
  - Quines són les primeres causes?

Metafísica



Aristòtil (384 – 322 aC)

- Probablement el nom ve de *meta ta physika*
- 'Després de la física'
- Tracta amb preguntes com ara
  - Què és el que existeix? i
  - Com és? i
  - Quines són les primeres causes?
  - de forma abstracta i generalitzada

Ontologia, què és?

Demòcrit (+-460 – 370 aC)

- Què i com son les coses?

Ontologia, què és?

Demòcrit (+-460 – 370 aC)

- Què i com son les coses?
- Aristòtil parlava de *primera filosofia* al llibre IV de la metafísica

Ontologia, què és?

Demòcrit (+-460 – 370 aC)

- Què i com son les coses?
- Aristòtil parlava de *primera filosofia* al llibre IV de la metafísica
- Paraula 'ontologia' fou inventat a 1606 a Alemanya (Jacob Lorhard)

Ontologia, què és?

Demòcrit (+-460 – 370 aC)

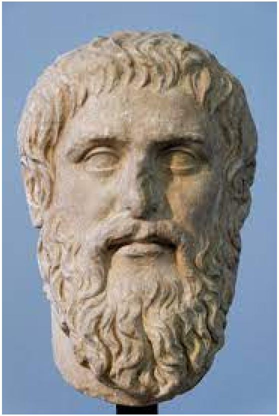
- Què i com son les coses?
- Aristòtil parlava de *primera filosofia* al llibre IV de la metafísica
- Paraula 'ontologia' fou inventat a 1606 a Alemanya (Jacob Lorhard)
- Per exemple, ontologia física de Demòcrit (Epic, Lucreci): tot està format per atoms

Ontologia, què és?

Demòcrit (+-460 – 370 aC)

- Què i com son les coses?
- Aristòtil parlava de *primera filosofia* al llibre IV de la metafísica
- Paraula 'ontologia' fou inventat a 1606 a Alemanya (Jacob Lorhard)
- Per exemple, ontologia física de Demòcrit (Epic, Lucreci): tot està format per atoms
- Sovint però, *ontologia* fa referència a la natura de coses no tangibles

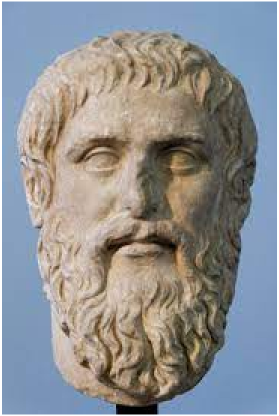
Ontologia, platonisme



Plató (+-460 – 370 aC)

- L'ontologia de Plató sosté que allò que existeix són les Formes/Idees

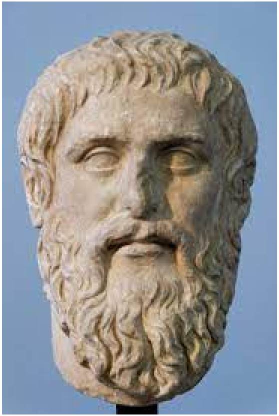
Ontologia, platonisme



Plató (+-460 – 370 aC)

- L'ontologia de Plató sosté que allò que existeix són les Formes/Idees
- Qui ha vist mai un cercle perfecte?

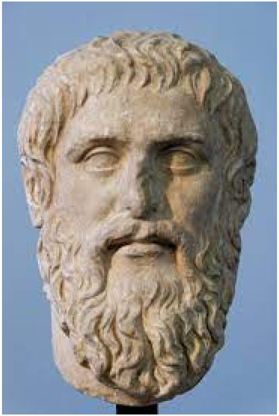
Ontologia, platonisme



Plató (+-460 – 370 aC)

- L'ontologia de Plató sosté que allò que existeix són les Formes/Idees
- Qui ha vist mai un cercle perfecte?
- El nombre 2 fa referència al concepte Platònic de dos, com ara dos objectes completament idèntics

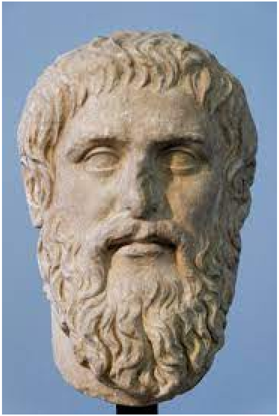
Ontologia, platonisme



Plató (+-460 – 370 aC)

- L'ontologia de Plató sosté que allò que existeix són les Formes/Idees
- Qui ha vist mai un cercle perfecte?
- El nombre 2 fa referència al concepte Platònic de dos, com ara dos objectes completament idèntics
- Qui ha vist mai dos objectes completament idèntics?

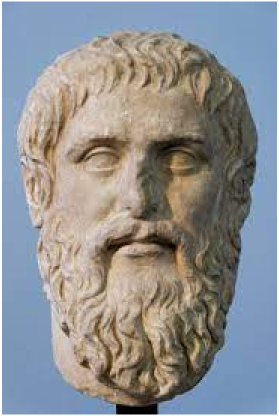
Ontologia, platonisme



Plató (+-460 – 370 aC)

- L'ontologia de Plató sosté que allò que existeix són les Formes/Idees
- Qui ha vist mai un cercle perfecte?
- El nombre 2 fa referència al concepte Platònic de dos, com ara dos objectes completament idèntics
- Qui ha vist mai dos objectes completament idèntics?
- Realisme és sinònim de Platonisme

Ontologia, platonisme



Plató (+-460 – 370 aC)

- L'ontologia de Plató sosté que allò que existeix són les Formes/Idees
- Qui ha vist mai un cercle perfecte?
- El nombre 2 fa referència al concepte Platònic de dos, com ara dos objectes completament idèntics
- Qui ha vist mai dos objectes completament idèntics?
- Realisme és sinònim de Platonisme

Ontologia, Idealisme Subjectiu

George Berkeley
(1685 – 1753 dC)

- L'ontologia de Berkeley sovint es resumeix com:

Ontologia, Idealisme Subjectiu

George Berkeley
(1685 – 1753 dC)

- L'ontologia de Berkeley sovint es resumeix com:
- *To be is to be perceived*

Ontologia, Idealisme Subjectiu

George Berkeley
(1685 – 1753 dC)

- L'ontologia de Berkeley sovint es resumeix com:
- *To be is to be perceived*
- No existeix cap altra cosa que percepcions

Ontologia, Idealisme Subjectiu

George Berkeley
(1685 – 1753 dC)

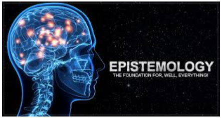
- L'ontologia de Berkeley sovint es resumeix com:
- *To be is to be perceived*
- No existeix cap altra cosa que percepcions
- No existeixen pas abstraccions

Ontologia, Idealisme Subjectiu

George Berkeley
(1685 – 1753 dC)

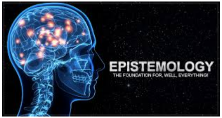
- L'ontologia de Berkeley sovint es resumeix com:
- *To be is to be perceived*
- No existeix cap altra cosa que percepcions
- No existeixen pas abstraccions
- No existeixen pas objectes independents de la ment humana

Epistemologia: Com sabem el que sabem?



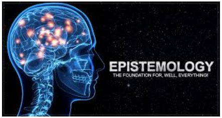
- Del grec "Episteme"i "logos"

Epistemologia: Com sabem el que sabem?



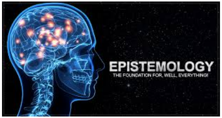
- Del grec "Episteme"i "logos"
- Episteme $\approx$ coneixement/conegut

Epistemologia: Com sabem el que sabem?



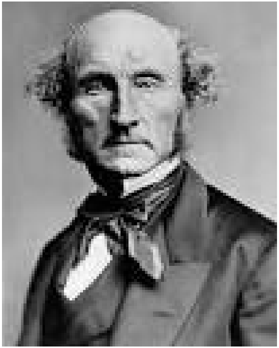
- Del grec "Episteme"i "logos"
- Episteme $\approx$ coneixement/conegut
- Exemple: Plató diu que no aprenem sino, recordem

Epistemologia: Com sabem el que sabem?



- Del grec "Episteme"i "logos"
- Episteme $\approx$ coneixement/conegut
- Exemple: Plató diu que no aprenem sino, recordem
- *L'Anamnesi* i reincarnació

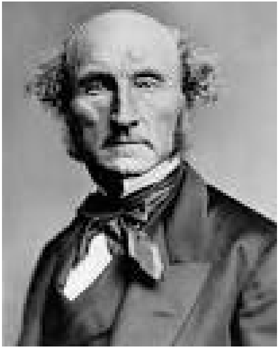
Epistemologia: Empirisme



John Stuart Mill
(1806 – 1873)

- Empirisme: tot es redueix a experiències sensorials

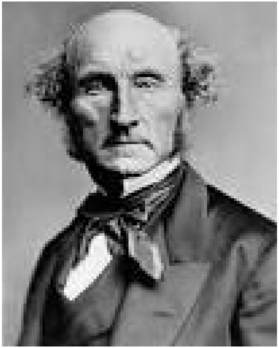
Epistemologia: Empirisme



John Stuart Mill
(1806 – 1873)

- Empirisme: tot es redueix a experiències sensorials
- *Inducció enumerativa*: generalitzar observacions

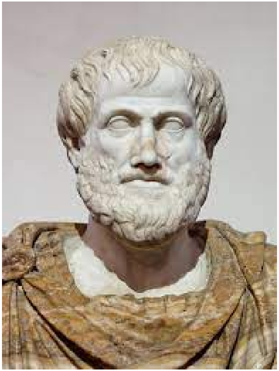
Epistemologia: Empirisme



John Stuart Mill
(1806 – 1873)

- Empirisme: tot es redueix a experiències sensorials
- *Inducció enumerativa*: generalitzar observacions
- Molt més no podem fer per adquirir coneixements

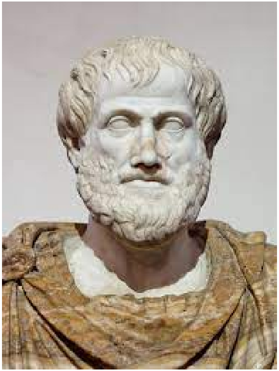
Lògica i Logos



Aristòtil (384 – 322 aC)

- Lògica és l'art del raonament vàlid

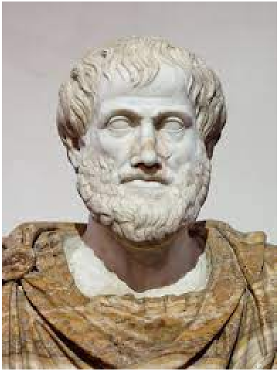
Lògica i Logos



Aristòtil (384 – 322 aC)

- Lògica és l'art del raonament vàlid
- Per exemple:

Lògica i Logos

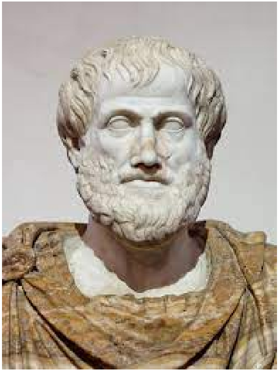


Aristòtil (384 – 322 aC)

- Lògica és l'art del raonament vàlid
- Per exemple:

  Si sabem que A i B, llavors, sabem que A

Lògica i Logos



Aristòtil (384 – 322 aC)

- Lògica és l'art del raonament vàlid
- Per exemple:

  Si sabem que A i B, llavors, sabem que A

- en símbols

$$A \wedge B \vdash A$$

Logos i Paraula

Jeroni (331/345 – 420 dC)

- Ἐν ἀρχῇ ἦν ὁ λόγος, καὶ ὁ λόγος ἦν πρὸς τὸν θεόν, καὶ θεὸς ἦν ὁ λόγος.

Logos i Paraula

Jeroni (331/345 – 420 dC)

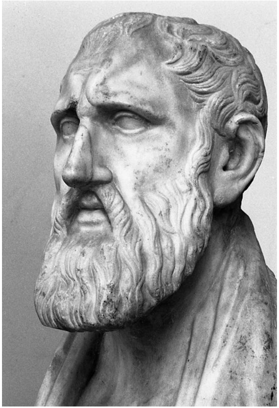
- Ἐν ἀρχῇ ἦν ὁ λόγος, καὶ ὁ λόγος ἦν πρὸς τὸν θεόν, καὶ θεὸς ἦν ὁ λόγος.
- Al principi existia la Paraula. La Paraula estava amb Déu i la Paraula era Déu. (Joan 1:1-14 BCI)

Logos i Paraula

Jeroni (331/345 – 420 dC)

- Ἐν ἀρχῇ ἦν ὁ λόγος, καὶ ὁ λόγος ἦν πρὸς τὸν θεόν, καὶ θεὸς ἦν ὁ λόγος.
- Al principi existia la Paraula. La Paraula estava amb Déu i la Paraula era Déu. (Joan 1:1-14 BCI)
- "λόγος" és traduït com "paraula"però té/tenia altres significats

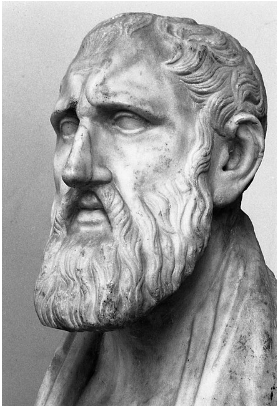
Logos i els estoics



Zenó de Citium (334 – 262 aC)

- Esperit

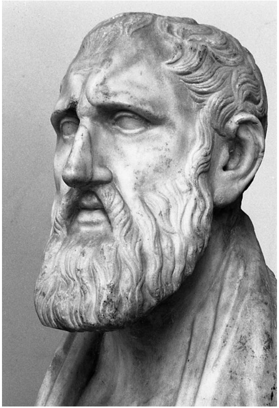
Logos i els estoics



Zenó de Citium (334 – 262 aC)

- Esperit
- paraula parlada

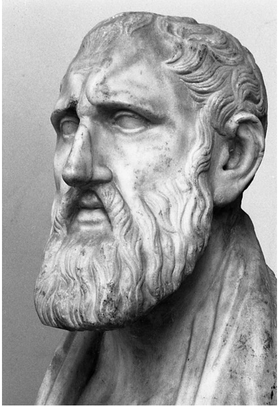
Logos i els estoics



Zenó de Citium (334 – 262 aC)

- Esperit
- paraula parlada
- paraula com a contenidor d'un pensament

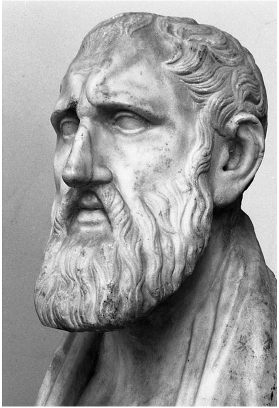
Logos i els estoics



Zenó de Citium (334 – 262 aC)

- Esperit
- paraula parlada
- paraula com a contenidor d'un pensament
- contingut del pensament

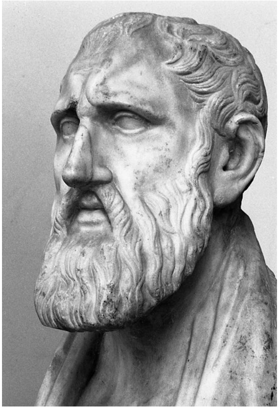
Logos i els estoics



Zenó de Citium (334 – 262 aC)

- Esperit
- paraula parlada
- paraula com a contenidor d'un pensament
- contingut del pensament
- raó

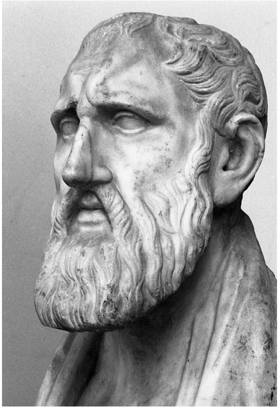
Logos i els estoics



Zenó de Citium (334 – 262 aC)

- Esperit
- paraula parlada
- paraula com a contenidor d'un pensament
- contingut del pensament
- raó
- Logos spermatikos: la font còsmica de l'ordre

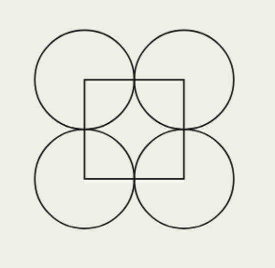
Logos i els estoics



Zenó de Citium (334 – 262 aC)

- Esperit
- paraula parlada
- paraula com a contenidor d'un pensament
- contingut del pensament
- raó
- Logos spermatikos: la font còsmica de l'ordre
- Llavors!

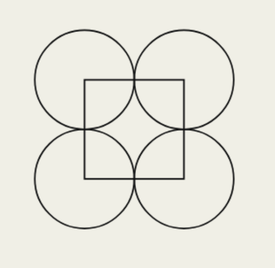
A priori versus *A posteriori*



Haurien d'encaixar així? Pensa!

- Diem que un judici és *a posteriori* quan només és pot fer després d'una observació, per exemple: *Aquesta presentació és a càrrec d'un Neerlandés.*

A priori versus *A posteriori*



Haurien d'encaixar així? Pensa!

- Diem que un judici és *a posteriori* quan només és pot fer després d'una observació, per exemple: *Aquesta presentació és a càrrec d'un Neerlandés.*
- Un judici *a priori* no depen d'una experiència, com ara: *si tens cinc euros, en particular en tens quatre*

Possible versus *necessari*

- Diríem que un exemple d'una veritat necessària és: un objecte completament blau, no pot ser completament vermell alhora

Possible versus *necessari*

- Diríem que un exemple d'una veritat necessària és: un objecte completament blau, no pot ser completament vermell alhora
- necessària: impossible que sigui fals

Possible versus *necessari*

- Diríem que un exemple d'una veritat necessària és: un objecte completament blau, no pot ser completament vermell alhora
- necessària: impossible que sigui fals
- veritat contingent: 'La força gravitatòria és inversament proporcional al quadrat de la distància '

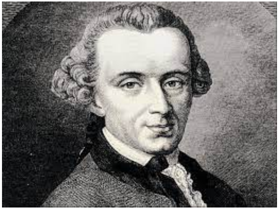
Possible versus *necessari*

- Diríem que un exemple d'una veritat necessària és: un objecte completament blau, no pot ser completament vermell alhora
- necessària: impossible que sigui fals
- veritat contingent: 'La força gravitatòria és inversament proporcional al quadrat de la distància '
- Quan una filosofia fa servir la modalitat de necessari o possible, ha d'explicar què és

Possible versus *necessari*

- Diríem que un exemple d'una veritat necessària és: un objecte completament blau, no pot ser completament vermell alhora
- necessària: impossible que sigui fals
- veritat contingent: 'La força gravitatòria és inversament proporcional al quadrat de la distància '
- Quan una filosofia fa servir la modalitat de necessari o possible, ha d'explicar què és
- Sovint van lligats: P és necessari, si en cap món possible P és fals

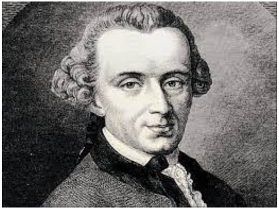
Sintètic versus *analític*



Immanuel Kant
(1724 – 1804)

- Originalment introduït per Kant, altres filòsofs van reinterpretar els predicats

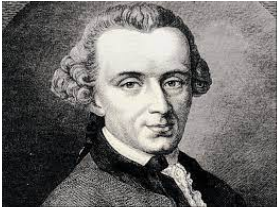
Sintètic versus *analític*



Immanuel Kant
(1724 – 1804)

- Originalment introduït per Kant, altres filòsofs van reinterpretar els predicats
- Un judici és analític quan el predicat és inclòs al subjecte

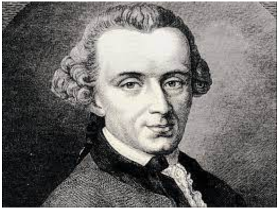
Sintètic versus *analític*



Immanuel Kant
(1724 – 1804)

- Originalment introduït per Kant, altres filòsofs van reinterpretar els predicats
- Un judici és analític quan el predicat és inclòs al subjecte
- exemple: tot triangle té tres angles

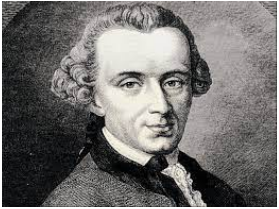
Sintètic versus *analític*



Immanuel Kant
(1724 – 1804)

- Originalment introduït per Kant, altres filòsofs van reinterpretar els predicats
- Un judici és analític quan el predicat és inclòs al subjecte
- exemple: tot triangle té tres angles
- Un judici és sintètic quan el judici no segueix dels termes involucrats

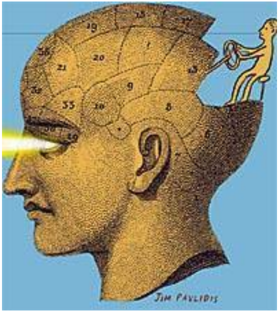
Sintètic versus *analític*



Immanuel Kant
(1724 – 1804)

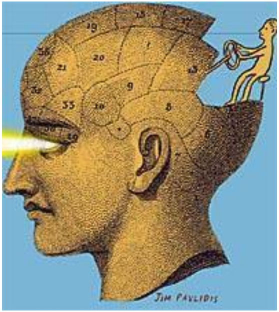
- Originalment introduït per Kant, altres filòsofs van reinterpretar els predicats
- Un judici és analític quan el predicat és inclòs al subjecte
- exemple: tot triangle té tres angles
- Un judici és sintètic quan el judici no segueix dels termes involucrats
- Exemple segons Kant: $2 + 3 = 5$

Intuició



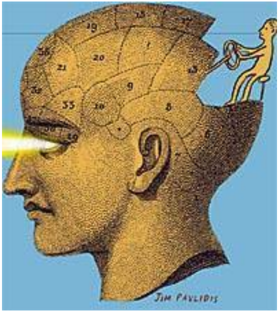
- Una intuïció és semblant a una creença

Intuició



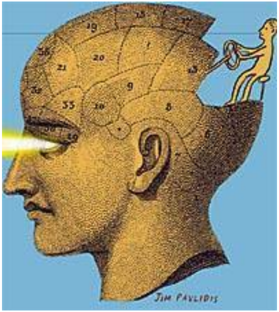
- Una intuïció és semblant a una creença
- Però, sovint més cert

Intuició



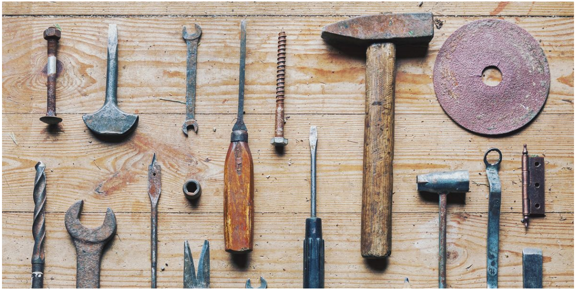
- Una intuïció és semblant a una creença
- Però, sovint més cert
- Un accés no rigorós a veritats

Intuició



- Una intuïció és semblant a una creença
- Però, sovint més cert
- Un accés no rigorós a veritats
- $a + b = b + a$

Eines preparats



Res més que nosaltres dins del món

David Hume
(1711 – 1776 dC)

- El coneixement prové només o principalment de l'experiència sensorial

Res més que nosaltres dins del món

David Hume
(1711 – 1776 dC)

- El coneixement prové només o principalment de l'experiència sensorial
- Nombres són atributs de col·leccions d'objectes

Res més que nosaltres dins del món

David Hume
(1711 – 1776 dC)

- El coneixement prové només o principalment de l'experiència sensorial
- Nombres són atributs de col·leccions d'objectes
- Llavors: existeix 10^{100}?

Res més que nosaltres dins del món

David Hume
(1711 – 1776 dC)

- El coneixement prové només o principalment de l'experiència sensorial
- Nombres són atributs de col·leccions d'objectes
- Llavors: existeix 10^{100}?
- Com Aristòtil: altres conceptes com *línia* o *triangle* només es manifesten en matèria.

Res més que nosaltres dins del món

David Hume
(1711 – 1776 dC)

- El coneixement prové només o principalment de l'experiència sensorial
- Nombres són atributs de col·leccions d'objectes
- Llavors: existeix 10^{100}?
- Com Aristòtil: altres conceptes com *línia* o *triangle* només es manifesten en matèria.
- Intenta evitar ingredients metafísics

Naturalisme i *The Web of Believe*

Williard Van Orman Quine
(1908 – 2000 dC)

- La xarxa de la creença

Naturalisme i *The Web of Believe*

Williard Van Orman
Quine
(1908 – 2000 dC)

- La xarxa de la creença
- La nostra comprensió del món la genera una xarxa

Naturalisme i *The Web of Believe*

Williard Van Orman Quine
(1908 – 2000 dC)

- La xarxa de la creença
- La nostra comprensió del món la genera una xarxa
- Els nodes exteriors corresponen a experiències sensorials

Naturalisme i *The Web of Believe*

Williard Van Orman Quine
(1908 – 2000 dC)

- La xarxa de la creença
- La nostra comprensió del món la genera una xarxa
- Els nodes exteriors corresponen a experiències sensorials
- Els nodes interiors contenen conceptes per a facilitar comprensió i predicció de les experiències sensorials

Naturalisme i *The Web of Believe*

Williard Van Orman Quine
(1908 – 2000 dC)

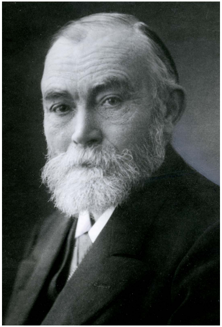
- La xarxa de la creença
- La nostra comprensió del món la genera una xarxa
- Els nodes exteriors corresponen a experiències sensorials
- Els nodes interiors contenen conceptes per a facilitar comprensió i predicció de les experiències sensorials
- elimina l'analítica vs. la sintètica

Naturalisme i *The Web of Believe*

Williard Van Orman Quine
(1908 – 2000 dC)

- La xarxa de la creença
- La nostra comprensió del món la genera una xarxa
- Els nodes exteriors corresponen a experiències sensorials
- Els nodes interiors contenen conceptes per a facilitar comprensió i predicció de les experiències sensorials
- elimina l'analítica vs. la sintètica
- realisme en ontologia, però només coneixements a posteriori

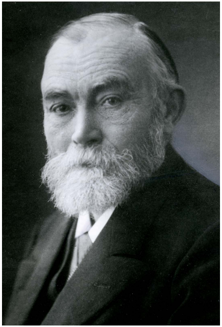
Retorn al Logos Spermatikos



Gottlob Frege
(1848 – 1925 dC)

- *Begriffschrift* (1879) : separació de la lògica del contingut específic (aritmètica/geometria/ètica)

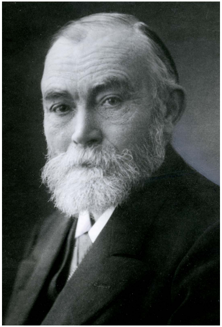
Retorn al Logos Spermatikos



Gottlob Frege
(1848 – 1925 dC)

- *Begriffschrift* (1879) : separació de la lògica del contingut específic (aritmètica/geometria/ètica)
- Begriffschrift $\sim$ Notació conceptual

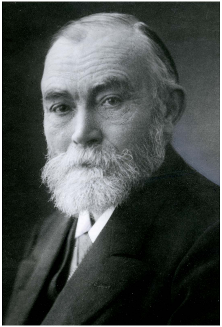
Retorn al Logos Spermatikos



Gottlob Frege
(1848 – 1925 dC)

- *Begriffschrift* (1879) : separació de la lògica del contingut específic (aritmètica/geometria/ètica)
- Begriffschrift $\sim$ Notació conceptual
- *Die Grundlagen der Arithmetik* (1884): *número* és una propietat de conceptes (i les seves extensions)

Retorn al Logos Spermatikos



Gottlob Frege
(1848 – 1925 dC)

- *Begriffschrift* (1879) : separació de la lògica del contingut específic (aritmètica/geometria/ètica)
- Begriffschrift $\sim$ Notació conceptual
- *Die Grundlagen der Arithmetik* (1884): *número* és una propietat de conceptes (i les seves extensions)
- *Grundgesetze der Arithmetik* (1896): desenvolupar les seves idees (logicisme) en les matemàtiques reals

El principi de Hume

Juli Cèsar
(100 – 44 aC)

- Equinumeritat de conjunts: podem relacionar tots els elements d'un conjunt amb tots els elements de l'altre sense repetir-ne cap i involucrant tots els elements.

El principi de Hume

Juli Cèsar
(100 – 44 aC)

- Equinumeritat de conjunts: podem relacionar tots els elements d'un conjunt amb tots els elements de l'altre sense repetir-ne cap i involucrant tots els elements.
- El Frege reduïa aritmètica a lògica mitjançant l'anomenat principi de Hume

El principi de Hume

Juli Cèsar
(100 – 44 aC)

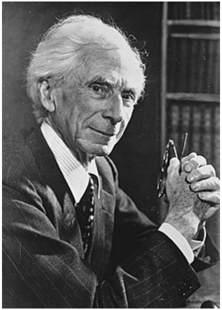
- Equinumeritat de conjunts: podem relacionar tots els elements d'un conjunt amb tots els elements de l'altre sense repetir-ne cap i involucrant tots els elements.
- El Frege reduïa aritmètica a lògica mitjançant l'anomenat principi de Hume
- Per qualsevol conceptes F i G, el número d'F és idèntic al número de G si i només si F i G són equinumerosos

El principi de Hume

Juli Cèsar
(100 – 44 aC)

- Equinumeritat de conjunts: podem relacionar tots els elements d'un conjunt amb tots els elements de l'altre sense repetir-ne cap i involucrant tots els elements.
- El Frege reduïa aritmètica a lògica mitjançant l'anomenat principi de Hume
- Per qualsevol conceptes F i G, el número d'F és idèntic al número de G si i només si F i G són equinumerosos
- 2 = Juli Cèsar ?

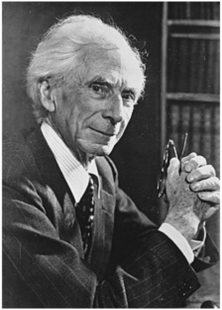
Una carta poc desitjada



Bertrand Russell
(1872 – 1970 dC)

- Frege necessitava '*extensionalitat*' per poder parlar d'objectes ($\neq$ Juli Cèsar)

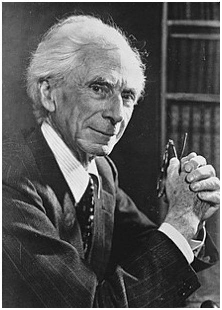
Una carta poc desitjada



Bertrand Russell
(1872 – 1970 dC)

- Frege necessitava '*extensionalitat*' per poder parlar d'objectes ($\neq$ Juli Cèsar)
- Per a qualsevol concepte, F, G, l'extensió de F és idèntica a l'extensió de G si i només si per a cada objecte a, Fa si i només si Ga

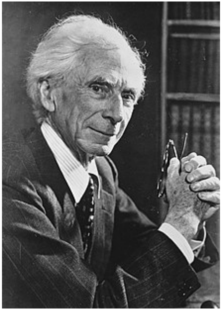
Una carta poc desitjada



Bertrand Russell
(1872 – 1970 dC)

- Frege necessitava '*extensionalitat*' per poder parlar d'objectes ($\neq$ Juli Cèsar)
- Per a qualsevol concepte, F, G, l'extensió de F és idèntica a l'extensió de G si i només si per a cada objecte a, Fa si i només si Ga
- Russell: considera el concepte R que com a extensió té exactament tots els objectes que no tenen el concepte R

Una carta poc desitjada



Bertrand Russell
(1872 – 1970 dC)

- Frege necessitava '*extensionalitat*' per poder parlar d'objectes ($\neq$ Juli Cèsar)
- Per a qualsevol concepte, F, G, l'extensió de F és idèntica a l'extensió de G si i només si per a cada objecte a, Fa si i només si Ga
- Russell: considera el concepte R que com a extensió té exactament tots els objectes que no tenen el concepte R
- Final del programa del Frege, dona lloc a *teoria de tipus*, l'escola del *predicativisme* i del *neo-logicisme*

El joc dels símbols

David Hilbert
(1862 – 1943 dC)

- Formalisme sosté que l'essència de les matemàtiques és la manipulació dels símbols

El joc dels símbols

David Hilbert
(1862 – 1943 dC)

- Formalisme sosté que l'essència de les matemàtiques és la manipulació dels símbols
- Mentres Frege era partidari del realisme i sostenia que les matemàtiques eren a priori, necessaria i analítica

El joc dels símbols

David Hilbert
(1862 – 1943 dC)

- Formalisme sosté que l'essència de les matemàtiques és la manipulació dels símbols
- Mentres Frege era partidari del realisme i sostenia que les matemàtiques eren a priori, necessaria i analítica
- el seu Begriffschrift va servir com a argument del formalisme!!!

El joc dels símbols

David Hilbert
(1862 – 1943 dC)

- Formalisme sosté que l'essència de les matemàtiques és la manipulació dels símbols
- Mentres Frege era partidari del realisme i sostenia que les matemàtiques eren a priori, necessaria i analítica
- el seu Begriffschrift va servir com a argument del formalisme!!!
- Hilbert amb el seu *deductivisme* proposava considerar el fragment *finitista* dels nombres com a Platònic i les matemàtiques més avançades com a formalisme

Uns resultats pocs desitjats

Kurt Gödel
(1906 – 1978 dC)

- Hilbert: *es giebt kein ignorabimus*

Uns resultats pocs desitjats

Kurt Gödel
(1906 – 1978 dC)

- Hilbert: *es giebt kein ignorabimus*
- Programa de Hilbert: el formalisme de les matemàtiques més avançades és conservatiu sobre les matemàtiques finitistes

Uns resultats pocs desitjats

Kurt Gödel
(1906 – 1978 dC)

- Hilbert: *es giebt kein ignorabimus*
- Programa de Hilbert: el formalisme de les matemàtiques més avançades és conservatiu sobre les matemàtiques finitistes
- O, equivalent, *consistent*

Uns resultats pocs desitjats

Kurt Gödel
(1906 – 1978 dC)

- Hilbert: *es giebt kein ignorabimus*
- Programa de Hilbert: el formalisme de les matemàtiques més avançades és conservatiu sobre les matemàtiques finitistes
- O, equivalent, *consistent*
- Els dos teoremes de la incompletitud de Gödel desmenteixen les dues creences

Intuicionisme *avant la lettre*

	a priori	*a posteriori*
analytic	1)	
synthetic	2)	3)

- Immanuel Kant: "$2+3=5$" és un judici (veritat) sintètic, a priori

Intuicionisme *avant la lettre*

	a priori	*a posteriori*
analytic	1)	
synthetic	2)	3)

- Immanuel Kant: "$2 + 3 = 5$" és un judici (veritat) sintètic, a priori
- sintètic, perque el predicat (igualtat) no segueix directament de les nocions involucrades $(+, 2, 3)$

Intuicionisme *avant la lettre*

	a priori	*a posteriori*
analytic	1)	
synthetic	2)	3)

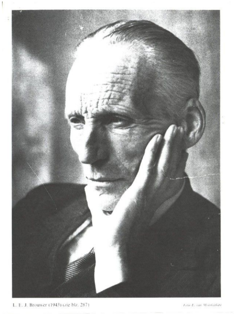
- Immanuel Kant: "$2 + 3 = 5$" és un judici (veritat) sintètic, a priori
- sintètic, perque el predicat (igualtat) no segueix directament de les nocions involucrades $(+, 2, 3)$
- A priori (i necessari), perquè no pot ser d'una altra manera

Intuicionisme *avant la lettre*

	a priori	*a posteriori*
analytic	1)	
synthetic	2)	3)

- Immanuel Kant: "$2+3=5$" és un judici (veritat) sintètic, a priori
- sintètic, perque el predicat (igualtat) no segueix directament de les nocions involucrades $(+, 2, 3)$
- A priori (i necessari), perquè no pot ser d'una altra manera
- Aprenem l'essència i com combinar les nocions involucrades $(+, 2, 3$ en aquest cas) mitjançant intuició

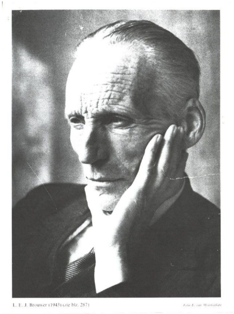
Brouwer: tertium non datur



L. E. J. Brouwer
(1881 – 1966)

- Ontologia: ser és ser construït

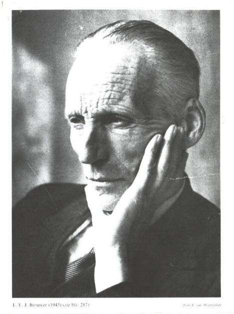
Brouwer: tertium non datur



L. E. J. Brouwer
(1881 – 1966)

- Ontologia: ser és ser construït
- per tant, $p \vee \neg p$ no és universalment vàlid

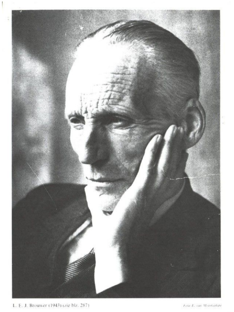
Brouwer: tertium non datur



L. E. J. Brouwer
(1881 – 1966)

- Ontologia: ser és ser construït
- per tant, $p \vee \neg p$ no és universalment vàlid
- les màtematiques es construeixen (no descarta que sigui necessari o a priori)

Brouwer: tertium non datur



L. E. J. Brouwer
(1881 – 1966)

- Ontologia: ser és ser construït
- per tant, $p \vee \neg p$ no és universalment vàlid
- les màtematiques es construeixen (no descarta que sigui necessari o a priori)
- Leopold Kronecker (1823 – 1891): *Déu va fer els nombres naturals; tota la resta és obra de l'home*

Moltes visions

Un teorema de Cantor

G. F. L. P. Cantor
(1881 – 1966)

- Escrivim $|A| = |B|$ per "el conjunt A és equinumerós amb el conjunt B"

Un teorema de Cantor

G. F. L. P. Cantor
(1881 – 1966)

- Escrivim $|A| = |B|$ per "el conjunt A és equinumerós amb el conjunt B"
- Exemple: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$

Un teorema de Cantor

G. F. L. P. Cantor
(1881 – 1966)

- Escrivim $|A| = |B|$ per "el conjunt A és equinumerós amb el conjunt B"
- Exemple: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$
- Cantor: $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$

Un teorema de Cantor

G. F. L. P. Cantor
(1881 – 1966)

- Escrivim $|A| = |B|$ per "el conjunt A és equinumerós amb el conjunt B"
- Exemple: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$
- Cantor: $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$
- Cantor: existeixen infinits tipus diferents d'infinit

Un teorema de Cantor

G. F. L. P. Cantor
(1881 – 1966)

- Escrivim $|A| = |B|$ per "el conjunt A és equinumerós amb el conjunt B"
- Exemple: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$
- Cantor: $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$
- Cantor: existeixen infinits tipus diferents d'infinit
- Pregunta natural de Cantor: existe un subconjunt X de $\mathbb{R}$ tal que $|\mathbb{N}| < |X| < |\mathbb{R}|$?

El teorema de Löwenheim-Skolem

L. Löwenheim
(1878 – 1957)

T. A. Skolem
(1887 – 1963)

- Si el meu llenguatge és finit i una teoria T té un model infinit, llavors, té un model per qualsevol cardinalitat

El teorema de Löwenheim-Skolem

L. Löwenheim
(1878 – 1957)

T. A. Skolem
(1887 – 1963)

- Si el meu llenguatge és finit i una teoria T té un model infinit, llavors, té un model per qualsevol cardinalitat
- En particular: existeix un model dels nombres naturals ($\mathbb{N}$) que té la mateixa quantitat de nombres naturals que nombres reals ($\mathbb{R}$)

Els teoremes d'incompletitud de Gödel

K. Gödel
(1881 – 1966)

- Primer teorema d'incompletitud: qualsevol teoria T raonable és incompleta

Els teoremes d'incompletitud de Gödel

K. Gödel
(1881 – 1966)

- Primer teorema d'incompletitud: qualsevol teoria T raonable és incompleta
- Segon teorema d'incompletitud: qualsevol teoria T raonable no demostra la seva consistència

Un teorema d'indecidibilitat de Turing

A. Turing
(1912 – 1954)

- No existeix cap algorisme per decidir si una fórmula és demostrable dins de la pura teoria del Begriffschrift

Un teorema d'indecidibilitat de Turing

A. Turing
(1912 – 1954)

- No existeix cap algorisme per decidir si una fórmula és demostrable dins de la pura teoria del Begriffschrift
- Qualsevol teoria raonable que amplia l'aritmètica elemental és indecidible

La indefinibilitat de la veritat

A. Tarski
(1901 – 1983)

- La veritat d'un sistema T no pot ser expressat dins del mateix llenguatge

La indefinibilitat de la veritat

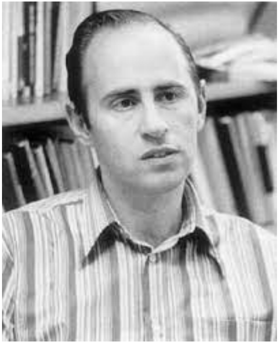
A. Tarski
(1901 – 1983)

- La veritat d'un sistema T no pot ser expressat dins del mateix llenguatge
- En particular, no existeix cap formula aritmètica τ tal que per tot formula aritmètica φ

$$\mathbb{N} \models \varphi \leftrightarrow \tau(\ulcorner \varphi \urcorner)$$

La hipòtesi del continu

ZFC + CH is consistent
(K. Gödel 1940)



ZFC + $\neg$CH is consistent
(P. Cohen 1963)

No sé quants-ismes

Nombres: Què en pensem?

- Empirisme

No sé quants-ismes

Nombres: Què en pensem?

- Empirisme
- Logicisme

No sé quants-ismes

Nombres: Què en pensem?

- Empirisme
- Logicisme
- Formalisme

No sé quants-ismes

Nombres: Què en pensem?

- Empirisme
- Logicisme
- Formalisme
- Intuicionisme

No sé quants-ismes

Nombres: Què en pensem?

- Empirisme
- Logicisme
- Formalisme
- Intuicionisme
- Finitisme

No sé quants-ismes

Nombres: Què en pensem?

- Empirisme
- Logicisme
- Formalisme
- Intuicionisme
- Finitisme
- Neo-logicisme

No sé quants-ismes

Nombres: Què en pensem?

- Empirisme
- Logicisme
- Formalisme
- Intuicionisme
- Finitisme
- Neo-logicisme
- Ultra-finitisme

No sé quants-ismes

Nombres: Què en pensem?

- Empirisme
- Logicisme
- Formalisme
- Intuicionisme
- Finitisme
- Neo-logicisme
- Ultra-finitisme
- Estructuralisme

No sé quants-ismes

Nombres: Què en pensem?

- Empirisme
- Logicisme
- Formalisme
- Intuicionisme
- Finitisme
- Neo-logicisme
- Ultra-finitisme
- Estructuralisme
- Ficcionalisme

No sé quants-ismes

Nombres: Què en pensem?

- Empirisme
- Logicisme
- Formalisme
- Intuicionisme
- Finitisme
- Neo-logicisme
- Ultra-finitisme
- Estructuralisme
- Ficcionalisme
- Nominalisme

No sé quants-ismes

Nombres: Què en pensem?

- Empirisme
- Logicisme
- Formalisme
- Intuicionisme
- Finitisme
- Neo-logicisme
- Ultra-finitisme
- Estructuralisme
- Ficcionalisme
- Nominalisme
- Naturalisme

No sé quants-ismes

Nombres: Què en pensem?

- Empirisme
- Logicisme
- Formalisme
- Intuicionisme
- Finitisme
- Neo-logicisme
- Ultra-finitisme
- Estructuralisme
- Ficcionalisme
- Nominalisme
- Naturalisme
- ...

Moltes gràcies