Intentando desentrañar la necesidad lógica y semántica

(On the Contingency of Logic in Possible World Semantics)

XI Congress of the Spanish Society for Analytic Philosophy, Seville

Iris van der Giessen, Joost J. Joosten, Paul Mayaux, **Vicent Navarro Arroyo**

ILLC (UvA), UB, UB, UB

Justificación semántica

- Si $\models A$ quiere decir

  A es verdad en todo mundo posible.

- y, si la semántica de $\Box A$ se estipula como

  $\Box A$ es verdad en algún mundo posible w si y solo si A es verdad en todos los mundos posibles de w.

- Entonces, la **Regla de Necesitación** $\frac{A}{\Box A}$ tiene una justificación clara.

Un error común

- La Regla de Necesitación
  Si yo tengo una demostración de A,
  entonces,
  yo puedo concluir que $\Box A$.
- Aplicación errónea de la Necesitación (Nec):

$$\dfrac{\dfrac{[\varphi]^1}{\Box\varphi}\,\text{Nec}}{\varphi \to \Box\varphi}\,{\to}\mathrm{I},\,1 \quad .$$

Justificación epistémica de la Necesidad

- Cómo interpretar el razonamiento modal $\vdash$. Si $\vdash$ es solo un artefacto para modelizar $\models$, entonces la Necesitación es clara.
- Si intentamos dotar a $\vdash$ con una justificación epistémica independiente para *razonar* sobre la Necesidad, entonces
- la Regla de Necesitación parece imponer un estatus de Necesidad al *razonamiento/lógica*:

  Si intento justificar la validez de A usando mi sistema de razonamiento
  entonces, como este razonamiento es necesario, necesariamente A está justificado por mi sistema de razonamiento.

- La conclusión parece ser: la lógica es necesaria.
- No obstante, la semántica de mundos posibles permite que diferentes mundos posibles estén regidos por diferentes lógicas.

Definiendo el lenguaje y las derivaciones

- Lenguaje $\mathcal{L}_\Box := p \mid \bot \mid A \wedge A \mid A \vee A \mid A \to A \mid \Box A$
- Fija $\text{Form}_\Box$ como la clase de fórmulas en $\mathcal{L}_\Box$
- ($\Gamma, \varphi \subseteq \text{Form}_\Box$) Una *derivación clásica* $\mathcal{D}$ de Γ a φ es una secuencia de fórmulas $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ tal que $\forall i \in \{1, 2, \ldots, k\}$:
  - $\varphi_i \in \Gamma$ o
  - φ_i tiene la forma de una tautología clásica en el lenguaje $\mathcal{L}_\Box$ o
  - Existen $j, l < i$ tal que φ_j tiene la forma $\varphi_l \to \varphi_i$
  - $\varphi_k = \varphi$.

Definiendo el lenguaje y las derivaciones

- $(\Gamma, \varphi \subseteq \mathrm{Form}_\Box)$ Una *derivación intuicionista* $\mathcal{D}$ de Γ a φ es una secuencia de fórmulas $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k$ tal que $\forall i \in \{1, 2, ..., k\}$:
  - $\varphi_i \in \Gamma$ o
  - φ_i tiene la forma de una tautología intuicionista en el lenguaje $\mathcal{L}_\Box$ o
  - Existen $j, l < i$ tal que φ_j tiene la forma $\varphi_l \to \varphi_i$
  - $\varphi_k = \varphi$.
- $\vdash_{\mathsf{c}}^{\mathcal{L}_\Box}$ / $\vdash_{\mathsf{i}}^{\mathcal{L}_\Box}$ representa la derivación clásica/intuicionista en $\mathcal{L}_\Box$
- $\overline{\mathrm{T}}^{c_\Box}/\overline{\mathrm{T}}^{i_\Box}$ es la clausura de una teoría T sobre $\vdash_{\mathsf{c}}^{\mathcal{L}_\Box}$ / $\vdash_{\mathsf{i}}^{\mathcal{L}_\Box}$

Definiendo los modelos

- Un modelo mixto es una tupla $\mathcal{M} := \langle W, R, e\rangle$ donde $\langle W, R\rangle$ es un marco de Kripke y e es una *extensión* $e : W \to \mathcal{P}(\mathrm{Form}_\Box) \times \{i, c\}$ $\big($denotado $e(w) = \langle T_w, l_w\rangle\big)$ tal que
  1. $\bot \notin T_w$;
  2. $T_w \vdash^{\mathcal{L}\Box}_{\mathrm{l_w}} \varphi \Rightarrow \varphi \in T_w$;
  3. $\Box\varphi \in T_w \iff \forall v(wRv \Rightarrow \varphi \in T_w)$;
  4. $\neg\Box\varphi \in T_w \iff \exists u(wRu \wedge \varphi \notin T_u)$.

Alternativamente, escribiremos $\mathcal{M} = \langle W, R, T_{w\,w\in W}\rangle$.

Un ejemplo de modelo mixto

$$
\begin{tikzcd}
 & w_2(i) \\
w_1(c) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & w_3(c)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
T_{w_3} &= \overline{\{p\} \cup \{\Box\varphi \mid \varphi \in \mathbf{Form}_\Box\}}^{c_\Box} \\
T_{w_2} &= \overline{\{p, q\} \cup \{\Box\varphi \mid \varphi \in \mathbf{Form}_\Box\}}^{i_\Box} \\
T_{w_1} &=
\end{aligned}
$$

$$
\overline{\{\neg p \vee q\} \cup \{\Box\varphi \mid \varphi \in T_{w_2} \cap T_{w_3}\} \cup \{\neg\Box\psi \mid \psi \in \mathbf{Form}_\Box / T_{w_2} \cap T_{w_3}\}}^{c_\Box}
$$

Lógica intuicionista y lógica modal

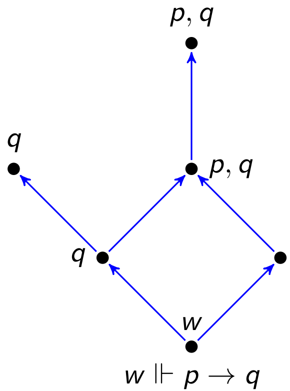
- Lógica intuicionista proposicional IPC:
  - Lenguaje: $A ::= p \mid \bot \mid A \wedge A \mid A \vee A \mid A \to A$
  - Tautologías intuicionistas
  - Reglas: Modus ponens

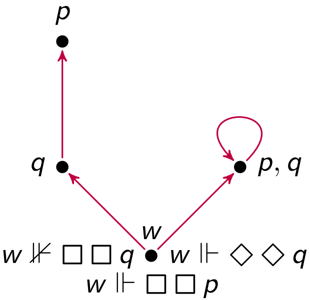
- Lógica modal clásica K:
  - Lenguaje: $A ::= p \mid \bot \mid A \wedge A \mid A \vee A \mid A \to A \mid \Box A \mid \Diamond A$
  - Tautologías clásicas
  - Axioma K: $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$
  - Reglas: Modus ponens y Necesitación.

Lógica intuicionista y lógica modal: Semántica

- Semántica de Kripke para IPC:
  - $M = (W, \leq, V)$ (Monotonicidad respecto a V)
  - $M, w \Vdash A \to B$ sii para todo $v \geq w$: $M, v \Vdash A$ implica $M, v \Vdash B$
- Semántica de mundos posibles para K:
  - $M = (W, R, V)$
  - $M, w \Vdash \Box A$ sii para todo v tal que wRv: $M, v \Vdash A$
    $M, w \Vdash \Diamond A$ sii existe v tal que wRv y $M, v \Vdash A$

Algunos ejemplos





Lógica modal intuicionista

Búsqueda del significado intuicionista de $\Box$ y $\Diamond$

Consecuencias clásicas del Axioma K:

(k1) $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

(k2) $\Box(A \to B) \to (\Diamond A \to \Diamond B)$

(k3) $\Diamond(A \vee B) \to (\Diamond A \vee \Diamond B)$

(k4) $(\Diamond A \to \Box B) \to \Box(A \to B)$

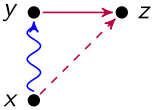
(k5) $\neg\Diamond\bot$

Diferentes lógicas modales intuicionistas/constructivistas:

- iK $:=$ IPC $+$ (k1)
- CK $:=$ IPC $+$ (k1) $+$ (k2)
- IK $:=$ IPC $+$ (k1) $+$ (k2) $+$ (k3) $+$ (k4) $+$ (k5)
- ...

Semántica birrelacional para iK

- Modelos birrelacionales ($\mathcal{BM}$) para iK:
  - $M = (W, \leq, R, V)$ (Monotonicidad respecto a V)
  - Propiedad de marco (F0):



  - $M, w \Vdash \Box A$ sii para todo v tal que wRv: $M, v \Vdash A$

Modelos concretos

- Modelos concretos: ($\mathcal{CMM}$)
  Dado un Marco de Kripke (MK) $F = \langle W, R \rangle$ y una función $\lambda : W \to \{c, i\}$, asignamos a cada $w \in W$ un modelo intuicionista de Kripke con una raíz $\langle U_w, \leq_w, V_w \rangle$ (raíz: $\overline{w} \in U_w$) tal que $\lambda(w) = c \Rightarrow U_w = \{\overline{w}\}$
- $\Vdash$ se define sobre $\Theta := \bigcup_{w \in W} U_w$ (para $x \in U_w$):
  1. $x \nVdash \bot$ y $x \Vdash \top$;
  2. $x \Vdash p$ sii $x \in V_w(p)$;
  3. $x \Vdash A \wedge B$ sii $x \Vdash A$ y $x \Vdash B$;
  4. $x \Vdash A \vee B$ sii $x \Vdash A$ o $x \Vdash B$;
  5. $x \Vdash A \to B$ sii $\forall y \in U_w(x \leq y \to y \nVdash A$ o $y \Vdash B)$;
  6. $x \Vdash \neg A$ sii $x \Vdash A \to \bot$;
  7. $x \Vdash \Box A$ sii $\forall v(wRv \to \overline{v} \Vdash A)$ tal que w es el único mundo tal que $\overline{w} \leq x$.

Conjetura para Modelos concretos

- Teorema: Si $\mathcal{M} = \langle W, R, \{\mathcal{M}_w\}_{w \in W} \rangle \in \mathcal{CMM}$ y definimos $T_w := \{\varphi \mid \overline{w} \Vdash \varphi\}$, entonces $\langle W, R, \{T_w\}_{w \in W} \rangle \in \mathcal{MM}$
- Ejemplo de modelo mixto no-concreto:
  $F = \langle \{w\}, R \rangle$, $R = \varnothing$, $I_w = c$,
  $T_w = \overline{\{p \vee q\} \cup \{\Box\varphi \mid \varphi \in \mathbf{Form}_\Box\}}^c$

Corrección para $\mathcal{MM}$

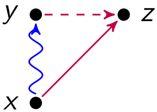
- Corrección: iK + $\Box A \vee \neg\Box A$ es correcta respecto a la clase $\mathcal{MM}$ de todos los modelos mixtos.

$$\mathrm{iK} + \Box A \vee \neg \Box A \vdash \varphi \Longrightarrow \mathcal{MM}(\mathsf{CPC}, \mathsf{IPC}) \vDash \varphi.$$

- Resultados de interés: Si $M \in \mathcal{MM}$,
  - (Necesitación)$M \vDash A$ implica $M \vDash \Box A$;
  - (Distributividad)$M \vDash \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$.

Condiciones de marco y completitud

- Condición de marco para $\Box A \vee \neg\Box A$ (F3 o BEM):



- Hemos notado que si $\mathcal{F} = \langle W, \leq, R \rangle$ es un modelo birrelacional, entonces

$$\mathcal{F} \text{ satisface BEM} \Longrightarrow \mathcal{F} \models \Box\, A \vee \neg\, \Box\, A.$$

  El recíproco podría ser falso.
- Completitud de $\mathcal{MM}$ respecto a iK+$\Box A \vee \neg\Box A$ requeriría:
  - Completitud de modelos birrelacionales $\mathcal{BM}$ con (F0+F3) respecto a iK+$\Box A \vee \neg\Box A$
  - Transición de $\mathcal{BM}$ a $\mathcal{MM}$ modelos ("Unraveling" o desenredo)

Plan general

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{M}\mathcal{M}(\mathsf{IPC}, \mathsf{CPC}) \vDash \varphi \arrow[d, Rightarrow, "\text{Inclusión}"'] & & \mathsf{iK} + \Box A \vee \neg \Box A \vdash \varphi \arrow[ll, Rightarrow, "\text{Correcto}"'] \\
\mathcal{C}\mathcal{M}\mathcal{M} \vDash \varphi \arrow[rr, Rightarrow, "\text{Desenredo}"'] & & \mathcal{B}\mathcal{M} + \mathsf{BEM} \vDash \varphi \arrow[u, Rightarrow, "\text{Completo}"']
\end{tikzcd}
$$

Figure: Plan general

Desenredo

Por contraposición, suponemos un modelo birrelacional $\mathcal{M} = \langle W, \leq, R, V \rangle$ tal que $\mathcal{M}, x \nVdash \varphi$ para algún $x \in W$.

La idea es añadir por cada $w \in W$ una copia de todos los mundos $\leq$-visibles.

- $\mathcal{M}' = \langle W', R', \{\mathcal{N}_x\}_{x \in W} \rangle$
  - $W' = \{\mathrm{Copy}(x, x) \mid x \in W\}$
  - $\mathrm{Copy}(x, x) R' \mathrm{Copy}(y, y) :\iff xRy$
  - $\mathcal{N}_{\mathrm{Copy}(x,x)} := \langle W'_{\mathrm{Copy}(x,x)}, \leq'_{\mathrm{Copy}(x,x)}, V'_{\mathrm{Copy}(x,x)} \rangle$
    - $\underline{W'_{\mathrm{Copy}(x,x)}} = \{\mathrm{Copy}(x, y) \mid x \leq y\}$
    - $\overline{\mathrm{Copy(x,x)}} := \mathrm{Copy}(x, x)$
    - $\mathrm{Copy}(x, y) \leq'_{\mathrm{Copy}(x,x)} \mathrm{Copy}(x, y') :\iff y \leq y'$
    - $p \in V'_{\mathrm{Copy}(x,x)}(\mathrm{Copy}(x, y)) :\iff p \in V(y)$

$$\boxed{\mathcal{M}, x \Vdash \varphi \iff \mathcal{M}', \mathrm{Copy}(x, x) \Vdash' \varphi.}$$

Combinando varias lógicas

- Incomparable, por ejemplo
  - La lógica de Gödel-Dummett, LC, de los marcos de Kripke lineales

$$(p \to q) \vee (q \to p)$$

  - La lógica intuicionista de profundidad acotada a 2, BD_2

$$p \vee (p \to (q \vee \neg q))$$

- Multivaluada
- Etc.

Sobre la estructura del tiempo

- Localmente, el tiempo puede comportarse de forma diferente a como lo haría globalmente.
- Tiempo universal versus horizonte de sucesos de un agujero negro, etc.
- Combinando diferentes lógicas temporales.

¡Gracias por su atención!