UNIVERSITEIT UTRECHT – FACULTEIT WIJSBEGEERTE

Docent prof. dr. A. Visser

Capita Selecta Logica 2: De geschiedenis van de logica
– referaat —

Nico Krijn ©
studentnummer 9734074

De grondslagen van de rekenkunde

[(1848 (1925]

'Die arithmetischen Wahrheiten beherrschen das Gebiet des Zählbaren. Dies ist das umfassendste;
denn nicht nur das Wirkliche, nicht nur das Anschauliche gehört ihm an, sondern alles Denkbare.'

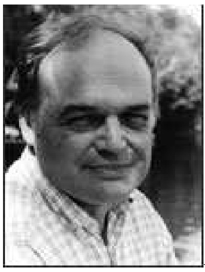
[Die Grundlagen der Arithmetik, 1884, §14]

(

Inhoudsopgave:

1. Inleiding

Van meet af aan was ik gefascineerd door de filosofie van Frege. Met rode oren las ik destijds over de avondster en de morgenster, en over de gedachten die onafhankelijk van de menselijke geest in een rijk bestaan. Frege bouwt geen luchtkastelen op moerasgrond, hij zoekt naar de fundamenten van ons denken. Door enkele zinnen van logicus George Boolos



[(1940 (1996] besloot ik Frege geheel in mijn hart te sluiten. Boolos schrijft:

> 'Frege was not a philosopher with a broad range of interests. Unlike Plato, Aristotle, Hume, and Kant, he wrote nothing on ethics or social philosophy. But an interest in "value theory" is not required for greatness in a philosopher. Descartes also wrote nothing in this area, and Leibniz and Wittgenstein, an insignificant amount.'[1]

De ware filosoof houdt zich afzijdig van ethiek en sociale filosofie, hij richt zich op de problemen van de grondslagen. Die Grundlagen verscheen in 1884 en de eerste helft van het boek is gewijd aan een scherp en kritisch overzicht van wat verscheidene filosofen en wiskundigen geschreven hadden over het begrip van getal. Frege toonde zich niet een mild criticaster, alhoewel een paar van zijn voorgangers, zoals Leibniz en Hume ongedeerd uit de strijd komen, worden de meesten van zijn tijdgenoten weggevaagd. Stricker bijvoorbeeld noemt de voorstelling van getallen motorisch, en maakt ze afhankelijk van spierervaringen. Frege merkt daar over op:

> '[..] so kann der Mathematiker seine Zahlen darin nicht wiedererkennen und weiss met einem solchen Satze nichts anzufangen.'

Een rekenkunde gebaseerd op ervaringen van spieren is even vaag als haar fundamenten. Ervaringen hebben absoluut niets te maken met rekenkunde.[2]

2. Die Grundlagen

Reeds in zijn voorwoord zet Frege zich af tegen de psychologie, hij formuleert drie fundamentele principes waaraan hij zich verbindt:

1. altijd een scherp onderscheid maken tussen het psychologische[i] en logische, het subjectieve en objectieve,
2. nooit te vragen naar de betekenis van een woord op zich, maar alleen in de context van een propositie,
3. oog hebben voor het onderscheid tussen begrip en object.

§1 – Nadat er een tijd lang is afgezien van de oude Euclidische gestrengheid als wiskundige standaard, is er nu een terugkeer naar te constateren. Thans worden bewijzen geëist voor veel dingen die in het verleden als zelfevident werden beschouwd.

§2 – Ook het begrip van getal en eenvoudige proposities over getallen, die de fundamenten van de rekenkunde vormen moeten worden onderzocht. Gezien de talloze toepassingen van simpele formules als 7+5 = 12, lijkt het vreemd hiervoor een bewijs te verlangen. Maar bewijzen verdienen de voorkeur boven inductie. Door het onderzoeken van eenvoudige gevallen kunnen we licht laten schijnen op het algemene proces van begripsvorming en hieruit procedures extraheren die universeel geldig zijn.

§3 – Filosofische motieven hebben mij aangezet tot onderzoek over de aard van de rekenkundige waarheden. Zijn zij a priori of a posteriori? Zijn zij synthetisch of analytisch? Deze vragen kunnen niet beantwoord worden zonder hulp van de wiskunde. In het algemeen moeten we de vraag hoe we tot de inhoud van een oordeel komen gescheiden houden van andere vragen. Het onderscheid tussen a priori en a posteriori, synthetisch en analytisch betreft niet de inhoud van een oordeel maar de rechtvaardiging voor het vormen van oordelen. Als er niet zo een rechtvaardiging is dan verdwijnen deze onderscheidingen. Een a priori fout is net zo een onzin als, zeg, een blauw begrip. Als een propositie a posteriori of analytisch wordt genoemd, dan is dat een oordeel over de uiteindelijke grond waarop de rechtvaardiging rust om de propositie voor waar te houden. De vraag is verschoven van de sfeer van de psychologie naar die van de wiskundige waarheid. We moeten zoeken naar het bewijs van de propositie en dan dit terug voeren op oer–waarheden. Als een waarheid a posteriori is, dan moeten we een beroep doen op feiten die uitspraken omhelzen over bepaalde objecten. Maar als het bewijs kan worden geleverd alleen op basis van algemene wetten, dan is het bewijs a priori.

§4 – Alleen als we elk gat in de keten van deducties weten te elimineren, dan kunnen we zeggen op welke oer–waarheden het bewijs rust. En alleen als we deze kennen zullen we in staat zijn om de oorspronkelijke vragen te beantwoorden. Uiteindelijk komen we zo tot proposities die niet bewezen kunnen worden, als we er niet in slagen om hun concepten te reduceren tot algemene concepten. Boven alles moet getal worden gedefinieerd of als ondefinieerbaar worden beschouwd. Het resultaat zal de aard van de rekenkunde bepalen.

MENINGEN VAN ENIGE SCHRIJVERS OVER DE AARD VAN WISKUNDIGE PROPOSITIES

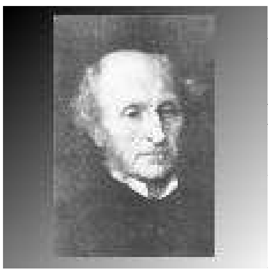
[i] Frege gebruikt soms het woord 'psychologisch' als hij 'psychisch' bedoelt.

§5 – We moeten onderscheid maken tussen numerieke formules als 2+3 = 5 en algemene wetten die voor alle getallen gelden. De eerste worden door sommige filosofen beschouwd als zelf–evidente axioma's. Volgens (Immanuel Kant [(1724 (1804] zijn de numerieke formules niet te bewijzen en zijn ze synthetisch. Kant had alleen kleine getallen in gedachten. Optellingen van grote getallen zijn dan te bewijzen door zelf–evidente intuïtie van kleine getallen. Maar het is gevaarlijk om een fundamenteel onderscheid te maken tussen kleine en grote getallen, vooral als het moeilijk is de grens te trekken tussen kleine en grote getallen.

§6 – (Gottfried Leibniz [(1646 (1716] zegt: 'Het is niet een onmiddellijke waarheid dat 2 en 2 is 4.' Hij construeert een bewijs voor optelling waarbij elk getal is gedefinieerd als opvolger van zijn voorganger. Door zulke definities reduceren we de oneindige verzameling van getallen tot het getal 1. Zelfs zonder een voorstelling te hebben van grote getallen krijgen we er toch greep op. Grassmann geeft een bewijs waarbij de som is gedefinieerd in termen van zichzelf. Maar als we niet weten wat (a+b) betekent, dan weten we helemaal niet wat a+(b+e) betekent.

§7, §8 – Mill definieert de getallen net als Leibniz. Hij neemt aan dat alle kennis empirisch is. Maar, wat is wat is het fysieke object dat hoort bij 777874? De definitie van het getal 3 bestaat uit het waarnemen van drie objecten, die kunnen worden gescheiden in 2 objecten en 1 object. Frege zegt:

> 'Wie gut doch, dass nicht Alles in der Welt niet– und nagelfest ist; dann könnten wir diese Trennung nicht vornehmen, und 2 + 1 wäre nicht 3! Wie schade, dass Mill nicht auch die physikalischen Thatsachen abgebildet hat, welche den Zahlen 0 und 1 zu Grunde liegen!'



Volgens (John Stuart Mill [(1806 (1873] volgen de berekeningen niet uit de definities maar uit de waarnemingen. Maar het is niet voldoende om te zeggen: er bestaan grote verzamelingen van dingen die opgesplitst kunnen worden. De theorie van Mill moet noodzakelijk leiden tot de eis dat een feit moet worden geobserveerd voor elk afzonderlijk getal. Volgens Mill kunnen we alleen stellen dat 1.000.000 = 999.999 + 1 als we een verzameling dingen hebben geobserveerd die precies opgedeeld is op deze manier. Voor Mill moet het getal 0 een raadsel zijn, want niemand heeft ooit 0 kiezelstenen gezien. Mill beschouwt het rekenen met 0 als een spel gespeeld met lege symbolen. Het getal 0 kan niet zonder betekenis zijn. De vraag dringt zich op hoe rekenkunde zou kunnen bestaan als de zintuigen hooguit drie dingen zouden kunnen waarnemen. Als we een propositie empirisch noemen als we waarnemingen moeten hebben om bewust van haar inhoud te worden, dan gebruiken we het woord 'empirisch' in de betekenis tegengesteld aan a priori. We doen een psychologische bewering, die alleen de inhoud betreft, de vraag van zijn waarheid wordt niet beschouwd. Op deze manier zijn alle verhalen ála Münchhausen ook empirisch, want zeker moet men alle soorten waarnemingen gedaan hebben om ze te kunnen uitvinden.

ZIJN DE WETTEN VAN DE REKENKUNDE INDUCTIEVE WAARHEDEN?

§9 – Het is aannemelijk dat numerieke formules kunnen worden afgeleid uit de definities van de individuele getallen alleen door middel van een paar algemene wetten. Mill begrijpt het symbool + op zo een manier dat het dient om een relatie uit te drukken tussen twee delen van een fysiek object. Maar dat is niet de betekenis van het symbool. Mill verwart de toepassingen die uitgevoerd kunnen worden met een rekenkundige propositie, met de zuivere wiskundige propositie zelf.

§10 – We zijn gewoon getallen te behandelen als zijnde van dezelfde soort, maar dat is alleen omdat we een verzameling van algemene proposities kennen die voor alle getallen geldt. We moeten nu net doen of we die niet kennen. Resultaten van gewone inductieve gevolgtrekkingen gelden voor elke plaats en elke tijd. Bij getallen is dit niet toepasbaar, getallen zijn niet in ruimte en tijd. De procedure van inductie kan zichzelf alleen rechtvaardigen door middel van algemene proposities van de rekenkunde. Inductie moet zichzelf baseren op de waarschijnlijkheidsleer, aangezien zij een propositie alleen als waarschijnlijk kan opleveren. Maar hoe kan waarschijnlijkheid worden ontwikkeld zonder de rekenkundige wetten te vooronderstellen?

ZIJN DE WETTEN VAN DE REKENKUNDE SYNTHETISCH A PRIORI OF ANALYTISCH?

§12 – Er zijn twee mogelijkheden die onderzocht moeten worden: synthetisch a priori zoals Kant stelt en analytisch. Bij Kant is er alleen zuivere intuïtie als de uiteindelijke grond van onze kennis. Ook (Rudolf Lipschitz [(1832 (1903] stelt dat bepaalde proposities worden afgeleid van innerlijke intuïtie. Ook de methode die (Hermann Hankel [(1839 (1873] voorstaat komt uiteindelijk neer op het aanroepen van innerlijke intuïtie, als we niet in staat zijn om andere gronden van kennis te produceren. Een intuïtie kan niet dienen als grond voor onze kennis van de wetten van de rekenkunde.

§13 – De verwantschap tussen rekenkunde en geometrie moeten we niet overschatten. Een geometrisch punt kan op zichzelf beschouwd niet worden onderscheiden van een ander. Maar bij getallen is dat anders, elk getal heeft zijn eigen bijzonderheid. In hoeverre een gegeven bijzonder getal al de andere kan representeren, en op welk punt zijn eigen speciale karakter in het spel komt, is niet zonder meer te zeggen.

§14 – Empirische proposities gelden voor de fysische en psychologische werkelijkheid, de waarheid van de geometrie beheerst het gebied dat ruimtelijk intuïtief is. De axioma's van de geometrie zijn onafhankelijk van elkaar en van de oer–wetten van de logica, en zijn derhalve synthetisch. De waarheden van de rekenkunde beheersen alles dat telbaar is. Dit is het grootste domein, want het behoort niet alleen tot het aanschouwelijke, maar ook tot het denkbare.

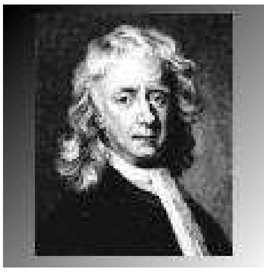
§15, §16 De uitspraken van Leibniz kunnen alleen betekenen dat de wetten van getal analytisch zijn, zo als te verwachten was, want voor hem valt a priori samen met analytisch. De wiskundige (William Jevons [(1835 (1882] zegt: 'Getal is slechts een logische onderscheiding en algebra een hoog ontwikkelde logica.' Deze visie is problematisch. Kan

deze grote, wijdvertakte en nog altijd groeiende boom van de wetenschap van getal zijn wortels hebben in kale identiteiten?

Mill zegt: 'De leer dat we door kunstige manipulaties van de taal feiten kunnen ontdekken, die verborgen processen van de natuur kunnen onthullen, is zo tegengesteld aan het gezonde verstand, dat iemand kennis van de filosofie moet hebben om het te geloven.' Dat is zeker waar, als we aannemen dat gedurende het kunstig manipuleren geheel niet wordt nagedacht. Iedereen die woorden of wiskundige symbolen gebruikt maakt er aanspraak op dat deze iets betekenen. En niemand zal verwachten dat er uit lege symbolen iets zinvol naar voren komt. Maar het is voor een wiskundige mogelijk lange berekeningen te maken zonder de symbolen intuïtief te begrijpen. En dat betekend niet dat de symbolen zelf geen betekenis hebben. We maken onderscheid tussen de symbolen en hun inhoud.

MENINGEN VAN ENIGE SCHRIJVERS OVER HET BEGRIP VAN GETAL

§18 – We moeten onderscheid maken tussen individuele getallen 3, 4, 5 enzovoort, en het algemene begrip van getal. Door getal 1 telkens te vermeerderen met 1, blijft de definitie incompleet zo lang als de getallen zelf niet gedefinieerd zijn.



§19 – (Isaac Newton [(1643 (1727] stelt voor om getallen niet te begrijpen als een verzameling van eenheden maar als de relatie tussen grootheden. Deze definitie is nutteloos voor ons doel, aangezien de uitdrukking 'verhouding tussen een verzameling en de eenheid van de verzameling' ons niet meer vertelt dan de uitdrukking 'getal waardoor een verzameling is gedefinieerd' (Euclides [((365 B.C ((300 B.C.] definieert getallen als de verhouding tussen lengten. Maar ook in dit geval blijven we in het ongewisse hoe de geometrisch gedefinieerde getallen zich verhouden tot de getallen van het alledaagse leven. Ook in onze alledaagse sommen moeten we ons kunnen verlaten op de wetenschap van de rekenkunde die ons voorziet van een basis voor de methoden die we toepassen.

§20 – De vraag waar het om gaat is of getal te definiëren is. Hankel meent van niet. Leibniz is geneigd getal te beschouwen als een adequaat idee. Als men in het algemeen denkt dat getal niet te definieerden is, dan is dat meer doordat de pogingen daartoe faalden, dan dat dit uit de zaak zelf af te leiden is.

IS GETAL EEN EIGENSCHAP VAN EXTERNE DINGEN?

§21, §22 – Frege citeert een aantal wiskundigen over de aard van de getallen in relatie tot de externe wereld, zie onderstaande tabel.

wiskundige	wat zijn getallen?
Cantor	getallen ontstaan door abstractie van objecten
Schröder	getallen beelden de werkelijk af
Baumann	getallen zijn niet geëxtraheerde concepten van externe objecten

Tabel 1 Visies op de aard van getallen

In de taal worden getallen vaak gebruikt in de adjectieve vorm, net als de woorden ‘rood’, ‘hard’ of ‘zwaar’. Het is duidelijk dat ik niet in staat ben om de hardheid van een ding door denken te veranderen. Echter, ik ben wel in staat om de Ilias te beschouwen als 1 dichtstuk, of als 24 boeken, of als een groot aantal verzen. Wat is dan de eigenschap die het getal uitdrukt. Is het mogelijk dat het helemaal niet behoort tot de dingen van de externe wereld? Er is een belangrijk verschil tussen kleuren en getallen. De rode kleur van een oppervlak behoort tot het oppervlak, onafhankelijk van enige keuze van ons. Een getal behoort tot iets afhankelijk van de manier waarvoor we kiezen.

3. Punten voor discussie

- Zijn numerieke formules te bewijzen?
- Zijn de wetten van de rekenkunde inductieve waarheden?
- Zijn de wetten van de rekenkunde synthetisch a priori of analytisch?
- Is een definitie van het begrip getal mogelijk?
- Is een getal een eigenschap van de externe wereld?

4. Enige korte biografieën

Articles by: J.J. O'Connor and E.F. Robertson

William Jevons (Born: 1 Sept 1835 in Liverpool, England – Died: 13 Aug 1882 in Hastings, England) studied natural sciences at University College London but broke off his studies in 1854 to take a job in Sydney. Jevons returned in 1859 and he outlined the marginal utility theory of value General Mathematical Theory of Political Economy (1862). In 1866 he was appointed to a chair of political economy at Manchester where he remained until he moved to University College, London in 1876. Jevons's main contributions outside economics are in mathematical logic where he developed the 'logical piano', a machine with 21 keys for operations in equational logic. It has many features which were later incorporated into computer design. His most important paper in logic was Principles of science (1874). As well as logic and economics he also made important contributions to probability

Rudolf Lipschitz (Born: 14 May 1832 in Königsberg, Germany (now Kaliningrad, Russia) Died: 7 Oct 1903 in Bonn, Germany). Rudolf Lipschitz's father was a landowner and Rudolf was born his father's estate at Bönkein which was near Königsberg. He began his university studies at a young age, entering the University of Königsberg and studying there under Franz Neumann. Following the custom of that time to study at different universities, Lipschitz went from Königsberg to Berlin where he studied under Dirichlet. This was not a particularly easy time for Lipschitz whose health was rather poor and caused him to take a year away from his studies to recover. However, he completed his doctoral studies with the award of a doctorate on 9 August 1853. There was no immediate university teaching post for Lipschitz who spent four years teaching at the Gymnasium in Königsberg and at the Gymnasium in Elbing. In 1857, however, Lipschitz became a Privatdozent at the University of Berlin. In this same year he married Ida Pascha, the daughter of one of the landowners with an estate near to his father's. Then in 1862 he became an extraordinary professor at Breslau. During his two years in Breslau, Lipschitz wrote two not very important papers. Jointly with Heinrich Schroeter and M. Frankenheim, he founded a seminar in mathematics and mathematical physics. He was nominated an ordinary professor by the University of Bonn and he left Breslau at Easter 1864. The University of Bonn was where Lipschitz spent the rest of his career. This was not because he did not have the opportunity to move. Quite the reverse, after Clebsch died in November 1872 he was offered his chair at Göttingen in the following year. Lipschitz was quite happy at Bonn, however, and he turned down the offer from Göttingen. Klein received his doctorate from the University of Bonn in 1868. He was supervised by Plücker, and examined by Lipschitz. Perhaps if Klein had still been in Göttingen when Lipschitz was offered the chair there, he may have been more inclined to accept. Perhaps the most remarkable fact about Lipschitz's work was the widely different topics on which he contributed:

> 'He carried out many important and fruitful investigations in number theory, in the theory of Bessel functions and of Fourier series, in ordinary and partial differential equations, and in analytical mechanics and potential theory.'

He worked on quadratic differential forms and mechanics. In the paper the author shows convincingly how Lipschitz mechanical interpretation of Riemann's differential geometry would prove to be a vital step in the road towards Einstein's special theory of relativity. Lipschitz showed that:

> '[..] the geometrical statements could be interpreted as mechanical laws [but these were] the very mechanical concepts that made it possible to deepen the corresponding geometrical relations.'

Lipschitz's work on the Hamilton–Jacobi method for integrating the equations of motion of a general dynamical system led to important applications in celestial mechanics. Lipschitz is remembered for the 'Lipschitz condition', an inequality that guarantees a unique solution to the differential equation y' = f(x,y). Peano gave an existence theorem for this differential equation, giving conditions which guarantee at least one solution. His work in algebraic number theory led him to study the quaternions and generalisations such as Clifford algebras. In fact Lipschitz rediscovered Clifford algebras and was the first to apply them to represent rotations of Euclidean spaces, thus introducing the spin groups Spin(n).

Hermann Hankel (Born: 14 Feb 1839 in Halle, Germany Died: 29 Aug 1873 in Schramberg, near Tübingen, Germany). Hermann Hankel's father was Wilhelm Gottlieb Hankel who was a physicist at Halle at the time Hermann was born. Hermann began his education in Halle but, in 1849 Wilhelm was appointed to the chair of physics at Leipzig so the family moved to Leipzig where Hermann attended the Nicolai Gymnasium. At the gymnasium he:

> '[..] improved his Greek by reading the ancient mathematicians in the original.'

In 1857 Hankel entered the University of Leipzig where he studied mathematics with Möbius and physics with his own father. Following the tradition in Germany at that time Hankel did not complete his studies at one university, but moved to several different universities during the course of his studies. From Leipzig he went to Göttingen in 1860 where he became a student of Riemann and then, in the following year, he worked with Weierstrass and Kronecker in Berlin. He received his doctorate for a thesis Uber eine besondere Classe der symmetrischen Determinanten in 1862. Hankel's habilitation was accepted in 1863 and he began teaching at Leipzig where he was appointed extraordinary professor in 1867. The appointment as extraordinary professor had been in the spring but by the autumn of the same year Hankel was at Erlangen to take up an appointment as ordinary professor. He married Marie Dippe in Erlangen but again he would move fairly soon, accepting the chair at Tübingen in 1869. He worked on the theory of complex numbers, the theory of functions and the history of mathematics. His work on complex analysis, however, is not considered of the first rank and in he is included with those who contributed but whose:

> '[..] influence on the foundations of complex analysis was not as essential as that of those mathematicians discussed in more detail'

Hankel made a systematic study of the rules of arithmetic with his Prinzip der Permanenz der formalen Gesetze (1867). He wrote another important work which was also published in 1867 Theorie der complexen Zahlensysteme which did much to make Grassmann's ideas better known. This work:

> '[..] constitutes a lengthy presentation of much of what was then known of the real, complex, and hypercomplex number systems. Beginning with a revised statement of George Peacock's

> principle of permanence of formal laws, he developed complex numbers as well as such higher algebraic systems as Möbius' barycentric calculus, some of Hermann Grassmann's algebras, and W R Hamilton's quaternions. Hankel was the first to recognise the significance of Grassmann's long–neglected writings'

Hankel looked at Riemann's integration theory and restated it in terms of measure theoretic concepts. This, and other work he did in this area, constitutes progress towards our current integration theories. He is remembered for the Hankel transformation which occurs in the study of functions which depend only on the distance from the origin. He also studied functions, now named Hankel functions or Bessel functions of the third kind, in a series of papers which appeared in Mathematische Annalen. His historical writings are rather hard to evaluate since they contain many errors, yet they are filled with brilliant insight. In the same way that he saw the importance of Grassmann's work, Hankel also must have considerable credit for seeing the importance of Bolzano's work on infinite series.

(

5. Literatuur

§

[1] Boolos, G., *Logic, logic and logic*, Harvard University Press, 1999, bladzijde 143

[2] FREGE, G. 'Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch mathematische Untersuchung über de Begriff de Zahl', 1884, AUSTEN, J.L. [vertaler], *The foundations of arithmetic, a logico−mathematical enquiry into the concept of number*, Basil Blackwell, Oxford, 1968