**Opmerking vooraf.**

Door het volgende heb ik geprobeerd een indruk te geven van Frege's constructie van het begrip 'getal'. De paragrafen betreffen zijn bespreking van de opvatting van verschillende filosofen. Het is dan ook te zien als een soort inventarisatie: 'Wat is er allemaal over het begrip getal gezegd?' De bespreking is compact en laat samenvatting daarom maar moeilijk toe. Zie het onderstaande daarom als een soort leidraad. Ik heb geprobeerd zo goed als het mogelijk is het verschil aan te geven tussen Frege's bespreking, verduidelijking en de vragen die daarbij aan de orde kunnen komen. Mocht mijn uiteenzetting van de opvatting van de één of andere filosoof of van Frege zelf onbegrijpelijk zijn, dan daarvoor mijn verontschuldiging. Frege's tekst en de bronnen zelf geven mogelijk een uitsluitsel. Mijn adres, in het geval van vragen of opmerkingen is:

`KeesJan.vandeLooij@phil.uu.nl`

§23. Mill stelde dat aantal een eigenschap van aggregaten is. Frege voerde daar tegen in dat het lastig is om die ene manier te vinden waarop een aggregaat is samengesteld. Verschillende manieren van samenstelling geven aanleiding tot verschillende aantallen. Aantal niet kan worden opgevat als een 'vaste' eigenschap en dat vormt een probleem.

§24. Voor Mill beperkten de natuurwetten het telbare. Maar kan er nog niet nog veel meer worden geteld? Hoe zit het met gebeurtenissen of gedachten? Leibniz stelde dat het aantal algemeen is. Het behoort de metafysica toe, maar het heeft alleen betrekking op lichamen. Dit houdt nog niet in dat de betekenis van getallen net als die van eigenschappen op een rechtstreekse manier door waarneming wordt bepaald. Zo is de 'drie' in 'driehoek' het resultaat van een mentale bezigheid.

§25. Berkeley zag dit als volgt. Het mentale bepaalt wat de eenheid is. Met de combinatie van eenheden verandert ook het aantal. Je beschouwd het huis als één of als een ding met vijf ramen. Geen van deze keuzen is noodzakelijk.

§26. Het is, zo zei Frege, verleidelijk om het wezenlijke van het getal te verbinden met de manier waarop het in onze ervaring ontstaat. Frege volgde Kant: de manier waarop de wereld zich aan ons voordoet is natuurlijk wel werkelijk, maar niet objectief. Dit verschil legde Frege uit door een meetkunde-voorbeeld. De kern van dit voorbeeld bestaat daarin dat verschillende meetkundige figuren (verschillend om aan te geven dat de waarneming subjectief is) na het toepassen van een projectie één en hetzelfde (objectieve) figuur zijn. De situatie met getallen zou hiermee vergelijkbaar zijn. De plaats van de uiteindelijke figuur wordt ingenomen door een getal en die van de meetkundige wetten door rekenkundige axiama's.

Ik denk dat Frege zich met dit voorbeeld voor een probleem plaatste. Hij heeft het wel over de uiteindelijke figuur, maar als je het voorbeeld consequent volgt, kan je niet anders dan vaststellen dat je die figuur niet kan zien. We zien alleen de figuur vóór de projectie. Alleen over de eigenschappen die deze heeft kunnen we het eens zijn. In het voorbeeld worden punten, lijnen en vlakken door elkaar gebruikt. Maar het verschil tussen de figuur vóór en die na projectie is, de parallel met de waarneming in acht nemend, veel groter. Het verschil wordt alleen door de projectie zelf overbrugd.

§27. Frege concludeerde dat getallen objectief zijn. Voorstellingen zijn dat niet. De grond voor de objectiviteit, zo stelde hij, wordt gevormd door het verstand. Misschien loste Frege het probleem in §26, als het voor hem bestond, op door aan te nemen dat het verstand een sleutelrol speelt bij het zetten van de stap van het subjectieve (de figuur vóór de projectie) naar het objectieve (die er na).

**Aantal als hoeveelheid.**

§28. Voor Frege duidde hoeveelheid op het meervoudige. Bijgevolg kan het begrip hoeveelheid niet worden gebruikt om de getallen 0 en 1 te definiëren. Een getal is bovendien meer dan de naam van een bepaalde hoeveelheid - het gaat er juist om aan te geven wat 'getal' is aan een hoeveelheid.[1]

**Meningen over eenheid en het getal 1.**

§29. Het woord 'eenheid' heeft verschillende betekenissen. Frege maakte bezwaar tegen Schröder's definitie. Deze drukt betekenis van aantal uit in termen van eenheid. Het probleem is dat het hiermee niet ophoudt: 'Wat is eenheid?'. Ik denk dat Frege daar mee bedoelde dat je een eigenschap niet objectief kan zien. Hij vond het problematisch om 'eenheid' als eigenschap te zien. Misschien kan ik het uitdrukken in termen van het meetkunde voorbeeld. De figuur die objectief een lijn is, wordt als snijdende vlakken of als losse punten gezien. Niet als lijn; niet objectief.

Frege voerde in deze paragraaf nog een argument aan. Doordat het begrip zo omvattend is, neemt de inhoud ervan - de mogelijkheid verschil te maken tusen het ene en het andere - af. Ik vraag me af in hoeverre dat dit erg is. Is het niet voldoende dat je eenheid als een eigenschap beschouwd? Frege vond van niet. De definitie van aantal via eenheid is in ieder geval wel een omweg. Weer in termen van het meetkunde voorbeeld: we draaien om de kwestie van de projectie heen.

Aan het einde van de paragraaf volgt nog een argument. 'Wijs' is een predikaat, je kan het van één of meer mensen (ook tegelijk) zeggen. Maar met 'één' gaat dit zonder verandering van betekenis niet. Maar waarom niet? Frege veronderstelde dat eenheid een leeg predikaat zou kunnen zijn. Blijkt nu dat het niet leeg is? Of is het gewoon geen predikaat? Hoe het ook zij, de vraag naar wat een predikaat is en welke regels er voor gelden, stelt zich. Of beter nog: 'Wat is logica?'

§30. Frege vroeg zich af welke zin het kan hebben om een voorwerp de eigenschap één toe te kennen. Hij maakte zich zorgen: 'Hoe kan de wetenschap op een vaag begrip als één berusten?' Ik vraag mij af: 'Is één een vaag begrip, of zijn het juist de verklaringen die vaag zijn en problemen opleveren?' Het is inderdaad lastig te

[1] Hier klinkt door dat Frege aantal opvatte als een eigenschap.

proberen het begrip zelf te definiëren. Maar misschien ligt de waarde van 'één' daarin dat het er op aan komt iedere 'Auffassung' uit te leggen. Het is mogelijk dat het teveel gevraagd is een algemene uitleg over 'één' te geven.

§31. Frege probeerde het vermoeden dat het verstand een sleutelrol speelt hard te maken. Ook een hond merkt fysieke ondeelbaarheid. Maar het dier heeft geen verstand, het beseft niet dat een kat 'één' kat is. Frege was het niet eens met Locke. Het verstand onderkend eenheid. Het wordt niet door de werkelijkheid opgelegd. De ook door dieren te ervaren ondeelbaarheid en begrensdheid is niet wezenlijk aan onze begrippen.

§32. Frege merkt hier niet op dat één geen eigenschap is. Het zou niet vreemd zijn geweest om dat op grond van de belangrijke rol die het verstand speelt, te doen. Hij ging wel in op de samenhang tussen één en woorden die van één zijn afgeleid en op een eigenschap duiden. Het verschil tussen de eigenschappen van het voorwerp en die van de omgeving bepaalt de innerlijke samenhang, de eenheid, van het voorwerp. Deze samenhang is een onderkenning door het verstand.

§33. Frege wilde deze niet laten afhangen van Anschauung. De poging eenheid vast te stellen door een soort 'samenhang naar keuze' kon Frege's goedkeuring niet wegdragen. Het maken van een keuze hangt juist samen met Anschauung. In termen van het meetkunde voorbeeld: je kan kiezen op welke manier je een lijn voorsteld. Dit is nog niet zo erg. Frege had meer moeite met de opvatting dat de onweerlegbaarheid niet meer objectief was. Je redeneert niet meer over het geprojecteerde, maar over het door jezelf gekozen figuur. Onweerlegbaarheid wordt 'onweerlegbaarheid in gedachten'. Misschien kan je zeggen: door de keuze houdt iedereen er een eigen logica op na.

### Zijn eenheden aan elkaar gelijk?

§34. Frege verwachtte niet dat het zin heeft om voorwerpen eenheden te noemen. Maar waarom gebeurt dit dan toch? Misschien omdat bij tellen wordt afgezien van eigenschappen. Of katten nu zwart of gevlekt zijn, ze worden als gelijk beschouwd. Je zou 'kat' daarom een eenheid kunnen noemen. Maar dit is wederom een kwestie van Anschauung! Abstractie levert alleen een begrip op. Met voorwerpen doet het niks.

§35. Verschil maakt tellen mogelijk. Frege haalde Jevons aan. Deze stelde dat het 'getal' gewoon een andere naam is voor 'verscheidenheid'.

§36. Jevons was ook duidelijk over 'eenheid': het is een voorwerp van het denken. Je kan drie munten elk als eenheid beschouwen. Ze zouden dan op hetzelfde moment dezelfde ruimte moeten innemen. Dit kan niet.[2] Maar in het denken gaat dit wel. Daar kan eenheid als een niet-af voorwerp bestaan. Niet helemaal bepaalt, maar wel op een bruikbare manier verschillend van andere (gedachte) eenheden. Misschien zijn inhoudsmaten een voorbeeld van Jevons' opvatting. De begrippen 'liter' en 'gallon' verschillen van elkaar, maar ze worden op dezelfde manier gebruikt en zijn bovendien vergelijkbaar. De vergelijking is nodig om het begrip zichzelf te kunnen laten definiëren.

Het is de vraag of Frege Jevons' begrip van eenheid precies op deze manier opvatte. Hij had in ieder geval wel twijfels bij Jevons' 'definitie' van $5$ als $1 + 1 + 1 + 1 + 1$. Het moet gezegd worden: Jevons was niet erg duidelijk over de manier waarop één met eenheid te maken heeft.

Ik denk dat Jevons zichzelf tegensprak. Hij noemde eenheid een voorwerp van het denken. Het is een begrip. Hij gaf duidelijk aan dat 'verschil' in het begrip zelf is besloten. Als we aannemen dat hij met één of 1 'eenheid' bedoeld, dan is het de vraag wat voor zin het heeft 1 te voorzien van accenten om zo verschil tussen de eenheden aan te duiden. Frege's kritiek is zonder meer terecht: dit verschil kan door $a + b + c + d + e$ te schrijven voor $5$ rechtstreeks worden uitgedrukt.

§37. Frege merkte vergelijkbare problemen op bij andere filosofen. Fouten komen aan het licht door te kijken naar de verwijzing door één en die door eenheid.

§38. Frege was duidelijk. Het getal één is een eigennaam die duidt op een voorwerp van de wetenschap. Dit voorwerp is enkelvoudig. Hier tegenover staat de 'eenheid' een begrip is. Alleen begrippen laten een meervoud toe. Het heeft daarom geen zin het begrip 'eenheid' en het enkelvoudig voorwerp één bij elkaar te brengen. Dit gebeurde in de opvatting van Leibniz wel.

Jevons bracht de beide in Frege's ogen bij elkaar door onder het begrip eenheid verschillende getallen één te laten vallen: $1'$, $1''$, ... Ieder getal één wijst naar een ander voorwerp in de werkelijkheid. Frege's bezwaar, dat dit de rekenkunde onmogelijk maakt, zou je misschien kunnen samenvatten door te zeggen dat de deur de Jevons met zijn onduidelijke definitie liet openstaan, semantiek de kans gaf de rekenkunde binnen te sluipen. In plaats van je te concentreren op het rekenen, moet je ook letten op dat waar de getallen naar wijzen. Dat een berekening klopt houdt nog niet in dat de resulterende verwijzing ook in orde is.

§39. Frege vatte de problemen met de definitie van het begrip aantal als volgt

[2] Jevons redeneerde consequent. 'Munt' als eenheid houdt in dat er niets verschillend is aan dat wat je 'munt' noemt. Ook niet het voorkomen in ruimte of tijd.

samen. Waar moet je op letten als je voorwerpen samen neemt om ze te tellen? Alleen op de verschillen? Dat zou kunnen, maar waar houdt het tellen dan op? Alleen op de overeenkomsten misschien? Ook niet; je kan op die manier nooit verschillende voorwerpen tellen. Welke rol speelt het getal één? Het kan niet tegelijk naar verschillende voorwerpen wijzen. Daarnaast is het maken van verschillende getallen één, zoals Jevons dat deed, niet in te passen in de rekenkunde. Ik denk dat het probleem met het begrip 'eenheid' daar in bestaat dat de stap van Anschauung naar aantal, de stap die het denken zet, moeilijk uit te leggen is. Of is het nog sterker: 'Wat schieten we er eigenlijk mee op om te weten hoe die stap precies wordt gezet?'

**Pogingen de moeilijkheden op te lossen.**

§40. Ruimte en tijd als oplossing. Je kan een punt in de ruimte slechts dan als een punt zien als je ook de rest van de ruimte ziet. Dit idee zou misschien een begin kunnen zijn van de verklaring van de stap die het verstand zet als het van eenheid tot aantal komt. Tot hiertoe ontbrak een dergelijke verklaring, maar Frege legde ook dit idee terzijde. Het begrip aantal valt of staat niet met het besef van ruimte. Voor tijd geldt eenzelfde bezwaar. We hebben wel tijd nodig om te tellen, maar het verschil tussen de voorwerpen bestaat toch wel, of we ze tellen of niet.

§41. Moeten we dan maar gewoon afzien van de ordening in ruimte en tijd? Frege vond van niet. Denken we de ruimte weg uit een sterrenbeeld waar zes sterren in zitten, dan zien we nog maar één ster. Je kan dus door het weglaten van ruimte niet aan getallen komen: er zijn zes sterren en niet één. Het probleem is dat ruimte iets toevoegd dat we bij het tellen nodig hebben. Het verstand haalt die toevoeging weg. Je zegt niet: 'Dit sterrenbeeld heeft 6' sterren en 6'' is het aantal sterren in het andere', maar: 'Ze hebben er beide 6'.

§42. Ook de poging die het begrip getal betrekt op het in een rij plaatsen van voorwerpen was volgens Frege gedoemd om te mislukken. Dat merk je door aan de voorwerpen te denken, nog vóór ze in een rij staan. Het is niet de rij zelf die wezenlijk is voor het maken van een verschil. Hetzelfde geldt voor het in gedachten kunnen nemen van één voorwerp. Ook als we niet aan het voorwerp denken, is het nog steeds apart van de rest.

§43. Schröder's voorstel om tot een oplossing te komen bestaat in de constructie van een afbeelding. In plaats van één naar een voorwerp te laten wijzen, wordt ieder voorwerp op één afgebeeld. Als er vijf voorwerpen zijn, dan kan je de afbeelding schrijven als $11111$, voor de duidelijkheid wordt dit $1+1+1+1+1$.

Het bezwaar dat Frege tegen deze oplossing maakte was dat Schröder 'aantal' niet verklaarde. Het beeld 'één' en de afbeelding zijn niets anders dan tekens.

§44. Jevons vond 'aantal' door abstractie. Het is voldoende de bijzondere kenmerken van voorwerpen bij de hand te hebben. Aantal is dat wat overblijft wanneer je de bijzonderheden die voorwerpen verschillend maken weglaat. Hij definiëerde het begrip aantal als 'lege vorm van verscheidenheid.[3] Frege vatte het voor handen zijn op als een gelijktijdig vasthouden. Hij achtte dit vooral bij grote aantallen moeilijk. Bovendien vond hij dat Jevons' idee niet als definitie kon worden opgevat. Niet alleen 0 en 1 vormen een probleem; er is ook het gebrek aan éénduidigheid. Je kan op meer dan één manier komen tot het voorhanden zijn van de verschillend tussen de voorwerpen.

**Oplossing van de moeilijkheden.**

§45. Frege vatte de problemen samen. Voorwerpen die we eenheden noemen lijken vergezeld te gaan van twee elkaar tegensprekende eigenschappen: gelijkheid en verschil. Verder levert het onderscheid tussen één en eenheid het probleem op dat één als enkelvoud niet onder het begrip eenheid kan vallen. Begrippen betreffen meervouden. Je zou daarom aan de volgende vraag kunnen denken. Welke enen vallen er naast 1 nog meer onder het begrip eenheid?

§46. Hoe loste Frege deze problemen op? Door getal in verband te brengen met oordelen. Een oordeel is wel van Anschauung afhankelijk, maar het levert een begrip op en dat is objectief. Je zou kunnen zeggen: 'In begrippen vinden getallen als eigenschap een 'veilig' onderkomen.

§47. Frege troostte zich de nodige moeite om te laten zien dat begrippen objectief zijn. Ze staan los van de werkelijkheid. De enige manier om een begrip met een voorwerp in verband te brengen is door het aan te wijzen.[4] Dit aanwijzen is voor het getal van geen belang. Het maakt ook niet uit of het begrip waar is of niet.

§48. Doordat het ene begrip verschilt van het andere, kunnen verschillende getallen betrekking hebben op hetzelfde stukje van de werkelijkheid. Misschien is het zinvol om in te zien dat niet de getallen, maar alleen de begrippen elkaar kunnen tegenspreken.

De pogingen het getal door abstractie te verkrijgen zijn volgens Frege wel begrij-

[3]Merk op dat deze definitie aansluit bij Wittgenstein's opvatting van logische vorm. Die werd gedefiniëerd als de mogelijkheid deel uit te maken van een verbinding.

[4]Frege gaat er niet op in of en hoe dit aanwijzen moet samengaan met het begrip. Door het uit te spreken of op te schrijven misschien?

pelijk. Abstractie levert een begrip op. Maar Frege zag het getal als eigenschap van een begrip. Hij sprak van een omwisseling. Waarschijnlijk bedoelde hij daarmee dat het getal niet het resultaat is van abstractie, maar er in zekere zin aan voorafgaat. Dit is misschien niet helemaal terecht. Meer dan dat het een eigenschap is, heeft hij eigenlijk nog niet gezegd. Hoe wordt het getal gedefiniëerd? Deze vraag staat denk ik nog steeds open.

§49. Frege vond bevestiging bij Spinoza. Deze merkte op dat aantal niets te maken heeft met het bestaan van een voorwerp, maar meer met het wezen ervan. Frege gaf het volgende voorbeeld. Zonder het begrip geldstuk denk je aan de stuiver en het kwartje dat je in je hand hebt niet als 'twee'.[5] Dat je meer dan één voorwerp nodig zou hebben om een begrip te vormen berust, zo meldde Spinoza, op een misverstand.

§50. Ook Schröder haalde nog een beperking weg en wel zodanig dat hij Frege's begrip niet alleen van toepassing maakte op voorwerpen, maar ook op begrippen zelf. Met zuivere abstractie kan je ook begrippen vormen. De voorwerpen zijn niet noodzakelijk. Belangrijk is wel dat dat wat wordt gevormd niet volledig is bepaald. In dat geval, zo vond Schröder, verandert het begrip in een eigennaam.

§51. Ik denk dat het nodige ten gunste van Schröder's idee te zeggen is. Frege maakte vooral bezwaar tegen de terminologie. Alleen met het veranderen van een begrip in een eigennaam was hij het echt oneens.

[5] Dit lijkt onwaarschijnlijk. Maar het voorbeeld kan worden aangepast. In plaats van geldstuk kan je het begrip 'object' gebruiken. Dan lijkt het ineens een stuk waarschijnlijker. Lukt het inderdaad nog wel om zonder besef van 'objecten' aan twee geldstukken te denken?