Definitie van bewijzen

We definiëren simultaan wat bewijzen $\mathcal{D}$ zijn, en wat aannamen $A(\mathcal{D})$ van bewijzen $\mathcal{D}$ zijn. De aannamen van een bewijs is altijd een (eventueel lege) verzameling.

Atomaire bewijzen

ψ is een bewijs en $A(\psi)$ is $\{\psi\}$.

Implicatie introductie

Er is één regel voor de implicatie introductie.

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]_1 \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi} \to \mathrm{I}, 1$$

De aannamen in $\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]_1 \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi} \to \mathrm{I}, 1$ zijn precies dezelfde als de aannamen in $\begin{array}{c}\varphi \\ \vdots \\ \psi\end{array}$, behalve dan dat φ als aanname vervalt. Dat wil zeggen, deze aanname wordt bij het toepassen van de regel ingetrokken. Voorbeeld: φ is een bewijs. De aanname in dit bewijs is $\{\varphi\}$. Dus, $\dfrac{[\varphi]_1}{\varphi \to \varphi} \to \mathrm{I}, 1$ is ook een bewijs. En de aannamen in dit bewijs zijn $\{\varphi\}$ met weglating van φ. M.a.w., er zijn geen aannamen.

Implicatie eliminatie

Er is slechts één eliminatieregel. Als $\overset{\mathcal{D}}{\varphi}$ en $\overset{\mathcal{D}'}{\varphi \to \psi}$ bewijzen zijn, dan is $\dfrac{\overset{\mathcal{D}}{\varphi} \quad \overset{\mathcal{D}'}{\varphi \to \psi}}{\psi} \to \mathrm{E}$ ook een bewijs. De aannamen in $\dfrac{\overset{\mathcal{D}}{\varphi} \quad \overset{\mathcal{D}'}{\varphi \to \psi}}{\psi} \to \mathrm{E}$ bestaat uit de aannamen in $\overset{\mathcal{D}}{\varphi}$ tezamen (verenigd) met de aannamen in $\overset{\mathcal{D}'}{\varphi \to \psi}$.

Conjunctie introductie

Als $\overset{\mathcal{D}}{\varphi}$ en $\overset{\mathcal{D}'}{\psi}$ bewijzen zijn, dan is $\dfrac{\overset{\mathcal{D}}{\varphi} \quad \overset{\mathcal{D}'}{\psi}}{\varphi \wedge \psi} \wedge\mathrm{I}$ ook een bewijs. De aannamen in $\dfrac{\overset{\mathcal{D}}{\varphi} \quad \overset{\mathcal{D}'}{\psi}}{\varphi \wedge \psi} \wedge\mathrm{I}$ zijn de aannamen in $\overset{\mathcal{D}}{\varphi}$ tezamen (verenigd) met de aannamen in $\overset{\mathcal{D}'}{\psi}$.

Conjunctie eliminatie

Er zijn twee eliminatieregels. We schrijven deze iets nauwkeuriger op dan van Dalen. Als $\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \varphi \wedge \psi\end{matrix}$ een bewijs is, dan is $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \varphi \wedge \psi\end{matrix}}{\varphi}\ \wedge\mathrm{E}, l$ dat ook. De aannamen in $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \varphi \wedge \psi\end{matrix}}{\varphi}\ \wedge\mathrm{E}, l$ zijn precies dezelfde als in $\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \varphi \wedge \psi\end{matrix}$.

Evenzo, als $\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \varphi \wedge \psi\end{matrix}$ een bewijs is, dan is $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \varphi \wedge \psi\end{matrix}}{\psi}\ \wedge\mathrm{E}, r$ dat ook. De aannamen in $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \varphi \wedge \psi\end{matrix}}{\psi}\ \wedge\mathrm{E}, r$ zijn precies dezelfde als in $\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \varphi \wedge \psi\end{matrix}$.

Disjunctie introductie

Er zijn twee introductieregels voor de disjunctie. We schrijven deze iets nauwkeuriger op dan van Dalen. Als $\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \varphi\end{matrix}$ een bewijs is, dan is $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \varphi\end{matrix}}{\varphi \vee \psi}\ \vee\mathrm{I}, l$ dat ook. De aannamen in $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \varphi\end{matrix}}{\varphi \vee \psi}\ \vee\mathrm{I}, l$ zijn precies dezelfde als in $\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \varphi\end{matrix}$.

Evenzo, als $\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \varphi\end{matrix}$ een bewijs is, dan is $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \varphi\end{matrix}}{\psi \vee \varphi}\ \vee\mathrm{I}, r$ dat ook. De aannamen in $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \varphi\end{matrix}}{\psi \vee \varphi}\ \vee\mathrm{I}, r$ zijn precies dezelfde als in $\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \varphi\end{matrix}$.

Disjunctie eliminatie

Als $\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \varphi \vee \psi\end{matrix}$ een bewijs is, als $\begin{matrix}\varphi\\ \vdots\\ \chi\end{matrix}$ een bewijs is (met mogelijk φ onder de aannamen) en als $\begin{matrix}\psi\\ \vdots\\ \chi\end{matrix}$ ook een bewijs is (met mogelijk ψ onder de aannamen), dan is $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \varphi \vee \psi\end{matrix}\quad \begin{matrix}[\varphi]_1\\ \vdots\\ \chi\end{matrix}\quad \begin{matrix}[\psi]_2\\ \vdots\\ \chi\end{matrix}}{\chi}\ \vee\mathrm{E}, 1, 2$ ook een bewijs. De aannamen in $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \varphi \vee \psi\end{matrix}\quad \begin{matrix}[\varphi]_1\\ \vdots\\ \chi\end{matrix}\quad \begin{matrix}[\psi]_2\\ \vdots\\ \chi\end{matrix}}{\chi}\ \vee\mathrm{E}, 1, 2$ bestaan uit de samenvoeging (vereniging) van de volgende drie onderdelen. Ten eerste alle aannamen in $\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \varphi \vee \psi\end{matrix}$. Ten tweede, alle aannamen in $\begin{matrix}\varphi\\ \vdots\\ \chi\end{matrix}$, maar dan met weglating van φ. Ten derde, alle aannamen in $\begin{matrix}\psi\\ \vdots\\ \chi\end{matrix}$, maar dan met weglating van ψ.

Met andere woorden, de voorkomens van de aannamen φ in $\begin{matrix}\varphi\\ \vdots\\ \chi\end{matrix}$ en de voorkomens van de aannamen ψ in $\begin{matrix}\psi\\ \vdots\\ \chi\end{matrix}$ worden bij de disjunctie eliminatie regel geschrapt.

Falsum eliminatie

Voor falsum ($\perp$) zijn er twee eliminatie regels. Als $\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \perp\end{matrix}$ een bewijs is, dan is $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \perp\end{matrix}}{\psi}\ \perp\mathrm{E}$ ook een bewijs. De aannames in $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \perp\end{matrix}}{\psi}\ \perp\mathrm{E}$ zijn precies dezelfde als in $\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \perp\end{matrix}$. Deze regel noemen we de *ex falso* ofwel *ex falso sequitur quodlibet* regel.

De *RAA* ofwel *Reductio ad absurdum* regel geeft het klassieke bewijs uit het ongerijmde weer. Als $\begin{matrix}\neg\varphi\\ \vdots\\ \perp\end{matrix}$ een bewijs is, dan is $\dfrac{\begin{matrix}[\neg\varphi]_1\\ \vdots\\ \perp\end{matrix}}{\varphi}\ \mathrm{RAA},1$ dat ook. De aannames in $\dfrac{\begin{matrix}[\neg\varphi]_1\\ \vdots\\ \perp\end{matrix}}{\varphi}\ \mathrm{RAA},1$ zijn dezelfde aannames als in $\begin{matrix}\neg\varphi\\ \vdots\\ \perp\end{matrix}$ met weglating van $\neg\varphi$. M.a.w., de aanname $\neg\varphi$ wordt bij deze regel ingetrokken.