

Constructies met bewijzen

Geef (informele) bewijzen voor de volgende uitspraken.

- 1 Als $\vdash \varphi \wedge \psi$, dan $\vdash \varphi$ en $\vdash \psi$.

Uitwerking: We stellen dus dat $\vdash \varphi \wedge \psi$. Wat betekent $\vdash \varphi \wedge \psi$? Wel, dit betekent dat $\varphi \wedge \psi$ bewijsbaar is. En dat betekent dat er een bewijs voor $\varphi \wedge \psi$ bestaat waarbij alle aannamen ingetrokken zijn (vierkante haken er omheen en een nummertje rechtsonder). Laten we dit hypothetisch bewijs weergeven met

\mathcal{D}
 $\varphi \wedge \psi$. Wat moeten we laten zien. Dat zijn twee dingen. Namelijk, dat $\vdash \varphi$ en dat $\vdash \psi$. Kortom, we moeten twee bewijzen geven. Uiteraard gebruiken we

ons hypothetisch bewijs als bouwsteen. En inderdaad, $\frac{\mathcal{D}}{\varphi \wedge \psi} \wedge E, l$ is een bewijs

voor φ . Evenzo zien we dat $\frac{\mathcal{D}}{\varphi \wedge \psi} \wedge E, r$ een bewijs is voor ψ en we zijn klaar.

- 2 Als $\vdash \varphi \vee \psi$ en $\vdash \neg\varphi$, dan $\vdash \psi$.

Uitwerking: we stellen nu dat $\vdash \varphi \vee \psi$ en $\vdash \neg\varphi$. Even als zojuist geven deze aannames ons twee hypothetische bewijzen, zeg \mathcal{D} $\varphi \vee \psi$ en \mathcal{D}' $\neg\varphi$. Met deze twee blokjes maken we spoedig een bewijs van ψ :

$$\frac{\frac{\mathcal{D}}{\varphi \vee \psi} \quad \frac{\frac{[\varphi]_1 \quad \frac{\mathcal{D}'}{\neg\varphi}}{\perp} \rightarrow E}{\psi \perp} \quad [\psi]_2}{\psi} \vee E, 1, 2$$