Voorbeeldopgave

(α) Bewijs met natuurlijke deductie:

$$(A \to (B \wedge C)) \vdash ((A \to B) \wedge (A \to C)).$$

(β) Laat ook zien dat

$$(A \to (B \wedge C)) \models ((A \to B) \wedge (A \to C)).$$

(γ) Bewijs met volledige inductie dat

$$\vdash (A \to (B_0 \wedge \ldots \wedge B_n)) \to ((A \to B_0) \wedge \ldots \wedge (A \to B_n)).$$

Bij α: Om te laten zien dat

$$(A \to (B \wedge C)) \vdash ((A \to B) \wedge (A \to C)).$$

moeten we dus een bewijs geven in natuurlijke deductie waar we $(A \to (B \wedge C))$ als aanname mogen gebruiken. Het volgende bewijs volstaat:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to (B \wedge C) \quad [A]_1}{B \wedge C} \to \mathrm{E}}{B} \wedge\mathrm{E}_l}{(A \to B)} \to \mathrm{I}_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to (B \wedge C) \quad [A]_2}{B \wedge C} \to \mathrm{E}}{C} \wedge\mathrm{E}_r}{(A \to C)} \to \mathrm{I}_2}{(A \to B) \wedge (A \to C)} \wedge\mathrm{I}$$

Bij β: Als we nu willen laten zien dat

$$(A \to (B \wedge C)) \models ((A \to B) \wedge (A \to C)).$$

moeten we dus heel precies de definitie van $\Gamma \models \varphi$ nagaan. Dit is definitie 1.2.4 uit Logic and Structure. Neem dus een valuatie v zo dat $v(A \to (B \wedge C)) = 1$. We willen nu aantonen dat $v((A \to B) \wedge (A \to C)) = 1$. Omdat $v(A \to (B \wedge C)) = 1$ en wegens de definitie van valuatie (definitie 1.2.1.) hebben we dus dat ofwel $v(A) = 0$ ofwel $v(B \wedge C) = 1$(of allebei). Wederom wegens de definitie van valuatie's hebben we dus dat ofwel $v(A) = 0$ ofwel ($v(B) = 1$ en $v(C) = 1$). We gaan de beide mogelijkheden na.

$v(A) = 0$

In het geval dat $v(A) = 0$ hebben we dus (wederom wegens de definitie van valuatie's) dat $v(A \to B) = 1$ en $v(A \to C) = 1$. Nog een keer de definitie van valuatie toepassen levert $v((A \to B) \wedge (A \to C)) = 1$.

$v(B) = 1$ en $v(C) = 1$

Omdat $v(B) = 1$ hebben we dus wegens de definitie van valuatie's dat $v(A \to B) = 1$. Omdat $v(C) = 1$ hebben we dus wegens de definitie van valuatie's dat $v(A \to C) = 1$. Nog een keer de definitie van valuatie toepassen levert $v((A \to B) \wedge (A \to C)) = 1$.

In beide gevallen kunnen we $v((A \to B) \wedge (A \to C)) = 1$ concluderen dus zijn we klaar. (Merk overigens op dat redeneren met disjunctie in de meta-logica precies zo geschiedt als in het formele systeem!)

Bij γ: We komen nu toe aan het inductief bewijs en gaan dus met onze mantra aan de slag.

Te Bewijzen:
$\forall n \in N \vdash (A \to (B_0 \wedge \ldots \wedge B_n)) \to ((A \to B_0) \wedge \ldots \wedge (A \to B_n))$.

Bewijs: Met efficiente notatie[1] kunnen we dus de te bewijzen stelling als volgt formuleren:

$$\forall n \in N \qquad \vdash (A \to \bigwedge_{i=0}^{n} B_i) \to (\bigwedge_{i=0}^{n} (A \to B_i))$$

Het bewijs gaat met inductie naar n.

- Basis: Als $n = 0$ moeten we laten zien dat $\vdash (A \to B_0) \to (A \to B_0)$. Het volgende bewijs volstaat:

$$\dfrac{[(A \to B_0)]_1}{(A \to B_0) \to (A \to B_0)} \to I_1 .$$

  Merk overigens op dat dit sneller is dan het volgende bewijs:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \to B_0]_1 \quad [A]_2}{B_0} \to E}{(A \to B_0)} \to I_2}{(A \to B_0) \to (A \to B_0)} \to I_1 .$$

- Inductiestap: We moeten nu dus laten zien dat
  $\vdash (A \to \bigwedge_{i=0}^{n+1} B_i) \to (\bigwedge_{i=0}^{n+1} (A \to B_i))$
  uitgaande van het "feit" dat
  $\vdash (A \to \bigwedge_{i=0}^{n} B_i) \to (\bigwedge_{i=0}^{n} (A \to B_i))$. Het volgende bewijs volstaat:

[1] In plaats van $C_0 \wedge \ldots \wedge C_n$, schrijven we $\bigwedge_{i=0}^{n} C_n$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[A \to \bigwedge_{i=0}^{n+1} B_i]_1$}
\AxiomC{$[A]_2$}
\RightLabel{$\to$ E}
\BinaryInfC{$\bigwedge_{i=0}^{n+1} B_i$}
\RightLabel{$\wedge$E$_l$}
\UnaryInfC{$\bigwedge_{i=0}^{n} B_i$}
\RightLabel{$\to$ I$_2$}
\UnaryInfC{$(A \to \bigwedge_{i=0}^{n} B_i)$}
\AxiomC{D}
\RightLabel{I.H.}
\UnaryInfC{$(A \to \bigwedge_{i=0}^{n} B_i) \to (\bigwedge_{i=0}^{n}(A \to B_i))$}
\RightLabel{$\to$ E}
\BinaryInfC{$(\bigwedge_{i=0}^{n}(A \to B_i))$}
\AxiomC{$[A \to \bigwedge_{i=0}^{n+1} B_i]_1$}
\AxiomC{$[A]_3$}
\RightLabel{$\to$}
\BinaryInfC{$\bigwedge_{i=0}^{n+1} B_i$}
\RightLabel{$\wedge$E$_r$}
\UnaryInfC{B_{n+1}}
\RightLabel{$\to$ I$_3$}
\UnaryInfC{$A \to B_{n+1}$}
\RightLabel{$\wedge$I}
\BinaryInfC{$(\bigwedge_{i=0}^{n+1}(A \to B_i))$}
\RightLabel{$\to$ I$_1$}
\UnaryInfC{$(A \to \bigwedge_{i=0}^{n+1} B_i) \to (\bigwedge_{i=0}^{n+1}(A \to B_i))$}
\end{prooftree}
$$

Het bewijs $\dfrac{D}{(A \to \bigwedge_{i=0}^{n} B_i) \to (\bigwedge_{i=0}^{n}(A \to B_i))}$ I.H. hebben wij vanwege het "feit" (de aanname) dat
$\vdash (A \to \bigwedge_{i=0}^{n} B_i) \to (\bigwedge_{i=0}^{n}(A \to B_i))$. Q.E.D.